Géométrie numérique

Séance 2 – Maillages

Franck Hétroy-Wheeler

M1 I3D et IIRVIJ – 2018-2019

Définition

Maillage surfacique polygonal :

Triplet (V, E, F) avec :

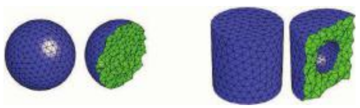
- V = ensemble de **sommets** (i.e. points de l'espace $\mathbb{R}^3$) ;
- E = ensemble d'**arêtes** (i.e. segments entre certains sommets de V) ;
- F = ensemble **connexe** de **faces polygonales** bordées par les arêtes.

- Distinction sommet $\neq$ point
- Connexité :

Remarque

On peut imaginer des maillages 3D et non 2D : contiennent des **polyèdres** (hyperfaces)

- Discrétisation (tessellation) du **volume** intérieur d'un objet
- Utile pour le calcul des structures (**éléments finis**)
- Extension naturelle en dimensions supérieures



Faces d'un maillage

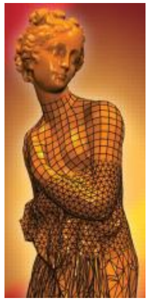
Dans le cas général, le maillage est formé de polygones quelconques

- Problème potentiel : non **coplanarité**
- Solutions : choix arbitraire d'un plan approchant, **triangulation**
- Convexité

Faces d'un maillage

En général, on utilise des maillages triangulaires ou quadrangulaires

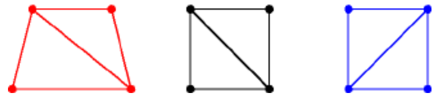
- **Triangles** : pas de problème de triangulation
- **Quadrangles** : forcément plans, ou choix arbitraire de la diagonale
- Dans le cas volumique : **tétraèdres**/**hexaèdres**



Géométrie et topologie

- La **géométrie** d'un maillage est donnée par les coordonnées 3D des sommets
- La **topologie** a trait aux relations de connectivité et voisinage entre sommets/arêtes/faces

$\Rightarrow$ Graphe **plongé** dans $\mathbb{R}^3$



Incidence

Définition

Deux éléments d'un maillage sont **incidents** si l'un est un bord de l'autre.

Peuvent être incidents :

- Un sommet et une arête
- Une arête et une face
- Un sommet et une face

Remarque :

- Même notion pour un graphe quelconque

Adjacence

Définition

Deux éléments de même dimension n d'un maillage sont **adjacents** s'ils partagent un élément de dimension $n-1$ ou $n+1$.

Peuvent être adjacents :

- Deux sommets
- Deux arêtes
- Deux faces
- En 3D : deux éléments de volume (tétraèdres, hexaèdres)

Remarques :

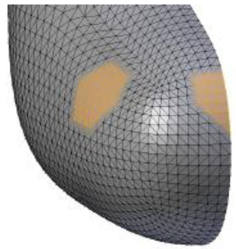
- Même notion pour un graphe quelconque
- Notion de **voisinage**

k-voisinage topologique

Définition

Pour un sommet v, ensemble des sommets joignables depuis v par au plus k relations d'adjacence successives.

- **Anneaux de voisinage**
- **Lien** : arêtes incidentes aux sommets d'un anneau
- Utilisation pour calculs géométriques (ex. : normale, plan tangent)



Valence d'un sommet v

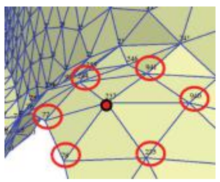
Définition

Nombre d'arêtes incidentes à v.

Définition équivalente

Nombre de 1-voisins de v/de sommets directement adjacents à v.

- Autre terme : **degré**



Orientation d'une face

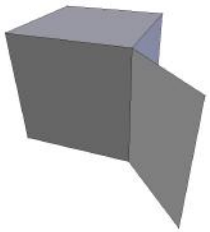
- Ordonnancement cyclique des sommets incidents à la face
- Permet de donner un signe à la direction de la **normale**
- Utilisé pour définir l'**intérieur** et l'**extérieur** de l'objet
- Utilisé pour le rendu (*culling*)
- On peut souvent définir une même orientation pour tout le maillage, mais pas toujours :

Variété (manifold)

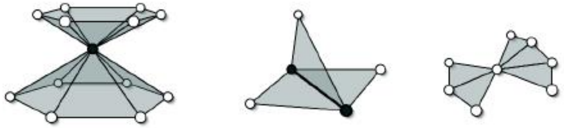
Définition

Un maillage est une 2-variété si le voisinage topologique de tout point est homéomorphe à un disque.

- **Variété à bord** (*with boundary*) : disque ou demi-disque
- Homéomorphisme : bijection continue
- Critère topologique et non géométrique
- 3-variété, *n*-variété



Singularités topologique



Courtesy Leif Kobbelt

Caractéristique d'Euler

Formule d'Euler

Toute 2-variété avec ou sans bord vérifie la formule suivante :

$$\#V - \#E + \#F = 2(c - g) - b$$

avec :

- $\#V$, $\#E$, $\#F$ nombres de sommets/arêtes/faces
- c, g, b nombres de composantes connexes/trous/frontières

Remarque : formule généralisable en dimensions supérieures

- 3-variétés : nombres de tunnels et de cavités
- Nombres de Betti

Caractéristique d'Euler

Définition

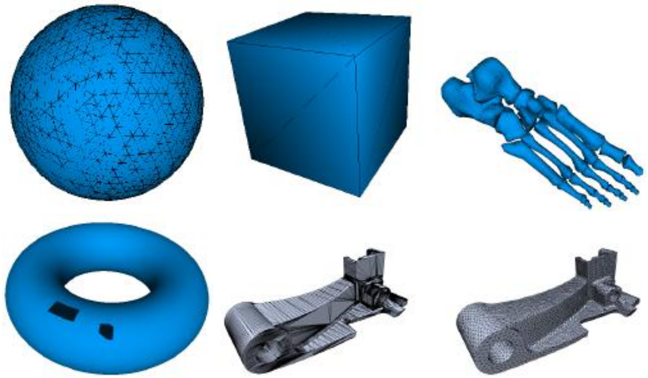
Le nombre de trous g est appelé le **genre** (*genus*) de la surface.

Définition

$\chi = \#V - \#E + \#F$ est appelée **caractéristique d'Euler** de la surface.

Exercice

Donner la caractéristique d'Euler des 6 surfaces ci-dessous.



Structure basée faces

- Structure de données basique : **liste des n-uplets de coordonnées** des sommets de chaque polygone
  - Exemple : 9 flottants pour un triangle
  - Exemple : format `STL`
- Avantage : très général
- Inconvénients majeurs :
  - **Redondance** : un sommet apparaît autant de fois que de polygones auxquels il appartient
  - Pas d'info **topologique** explicite : **soupe** de triangles

Structure basée faces indexée

Deux listes :

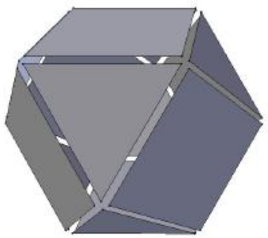
- **Triplets de flottants** précisant la position (coordonnées 3D) des sommets
- **n-uplets d'indices** de sommets représentant des polygones à n côtés
  - n peut être variable
- Exemples : formats `OBJ`, `OFF`, `VRML`

Exercice

Supposons qu'on stocke chaque entier ou flottant sur 4 octets et qu'on a un maillage triangulaire avec n sommets et m faces. Place mémoire nécessaire ? Gain par rapport à la structure précédente ?

Remarques

- Première liste = **géométrie**, seconde = **topologie** (connectivité)
- Pas de contrainte sur le type de faces ou de surfaces
- Pas d'information stockée sur les **arêtes**



Inconvénients

- Pas d'information sur les **voisins** des sommets et des faces
- Pas de lien depuis les sommets vers les faces

⇒ Obtenir la **liste des voisins** (sommets ou faces) d'un sommet peut coûter cher

Listes d'adjacence

On peut faciliter l'accès aux données de voisinage en créant des **listes d'adjacence/d'incidence** :

- liste sommet → sommets, faces ou arêtes
- liste arête → sommets, faces ou arêtes
- liste face → sommets, faces ou arêtes

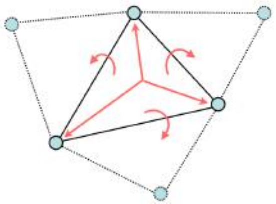
Inconvénient : **redondance** d'information

- Volume de données
- Maintenabilité des données

⇒ **Compromis** à trouver entre rapidité d'accès aux infos et volume de données à stocker

Structure basée faces avec listes d'adjacence

- **Sommet** : pointeur vers **une** face incidente
- **Face** :
  - Tableau de pointeurs vers les sommets de la face
  - Tableau de pointeurs vers les faces adjacentes
- Exemple : triangulation 2D dans `CGAL`

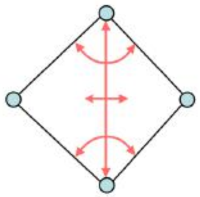


Courtesy Leif Kobbelt

- Permet de passer d'un sommet ou d'une face à ses voisins
- Assez coûteux, toujours pas d'info sur les arêtes

Structure basée arêtes

- La plus répandue : **Winged-edge** [Baumgart 1972]
- **Sommet** : pointeur vers **une** arête incidente
- **Arête** :
  - Pointeurs vers ses deux sommets extrémités
  - Pointeurs vers les deux faces incidentes
  - Pointeurs vers les deux arêtes précédentes et les deux arêtes suivantes dans ces faces
- **Face** : pointeur vers **une** arête incidente



Courtesy Leif Kobbelt

Inconvénients

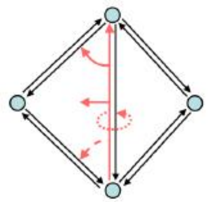
- Décrit forcément une **variété** (une arête est toujours partagée par deux faces)
- Assez coûteux
- Parcourir les voisins d'un sommet nécessite de **distinguer les cas**

Structure Half-edge

- [Mantyla 1988], [Kettner 1999]
- **Objectifs** : être plus compact que Winged-edge et ne pas avoir de cas à distinguer
- Idée : **orienter** les arêtes
  - "Couper" chaque arête dans le sens de la longueur
  - Une **demi-arête** dans chaque direction/dans chaque face incidente
  - Un choix d'orientation pour les faces (le même pour toutes) : horaire/anti-horaire

Structure Half-edge

- **Sommet** : pointeur vers **une** demi-arête incidente (dont il est source)
- **Demi-arête** :
  - Pointeur vers le sommet source
  - Pointeur vers la face à laquelle elle appartient
  - Pointeurs vers la demi-arête précédente et la demi-arête suivante dans la face
  - Pointeur vers la demi-arête tête-bêche
- **Face** : pointeur vers **une** demi-arête incidente

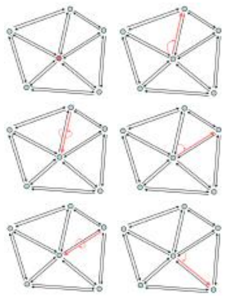


Courtesy Leif Kobbelt

Exercice

Donner un algo permettant de parcourir tous les sommets voisins d'un sommet donné v.

1. $e \leftarrow$ demi-arête sortante de v
2. $e \leftarrow$ demi-arête tête-bêche de e
3. $v_1 \leftarrow$ sommet source de e
4. $e \leftarrow$ demi-arête suivante de e
5. $e \leftarrow$ demi-arête tête-bêche de e
6. $v_2 \leftarrow$ sommet source de e
7. Etc.



Courtesy Leif Kobbelt

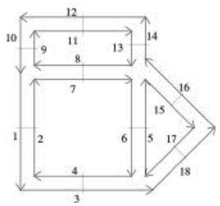
Exercice récapitulatif

Soit un maillage contenant n sommets, $3n$ arêtes et $2n$ faces. Comparer la place mémoire nécessaire pour les 5 structures vues précédemment : structure basée faces naïve, structure basée faces indexée, structure basée faces avec listes d'adjacences, Winged-edge, Half-edge.

1. $72n$
2. $36n$
3. $64n$
4. $120n$
5. $144n$ (réductible à $96n$ car pointeurs vers précédente et tête-bêche non nécessaires)

Carte combinatoire

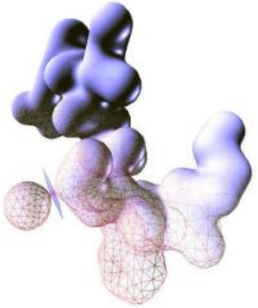
- Extension de la structure Half-edge en dimension finie quelconque
  - Demi-arêtes généralisées : **brins** (*darts*)
  - Arêtes têtes-bêches : **involutions** sur les brins
  - Arêtes suivantes : **permutations** sur les brins
- Représente la subdivision d'un espace nD fermé en cellules
- Voir cours S3 “Modélisation géométrique 3D”



Manipulation de maillages

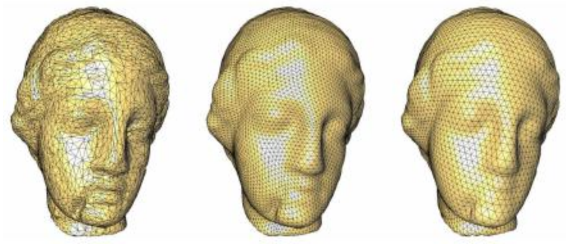
- Maillage = approximation **discrète** C^0 de la surface d'un objet continu et lisse
- Géométrie + topologie

  $\Rightarrow$ Calcul/modification au niveau **topologique** et/ou **géométrique**



Remaillage

- Objectif : maillage de meilleure **qualité**
  - **Topologique** : moins de sommets/faces, valence des sommets plus homogène, . . .
  - **Géométrique** : triangles plus équilatéraux (F.E.M.), meilleure approximation de la surface lisse sous-jacente



Courtesy Pierre Alliez

Processus général

Tant que **critère global de qualité** non vérifié {
  Choix d'une **opération topologique locale**
  Mise à jour du maillage selon cette opération
  Recalcul de la qualité
}

Remarque :

- Il existe aussi des approches globales
- Exemple : algorithme de Lloyd (k-means continu)

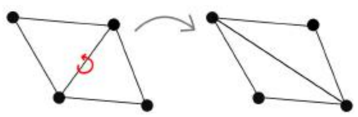
Basculement d'arête (edge flip)

Définition

Remplacement de deux **triangles** adjacents ABC et ACD formant un quadrilatère **convexe** par les triangles ABD et BCD.

Intérêts :

- Meilleure qualité locale du maillage
- Préliminaire à/Rend possible d'autres opérations (ex. : effondrement d'arête)

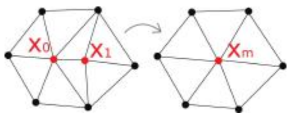


Effondrement d'arête (edge collapse)

Définition

Fusion de deux sommets adjacents par suppression de l'arête les reliant.

- Cas général : les deux faces incidentes perdent un côté
- Maillage triangulaire : les deux faces incidentes sont supprimées
  - Bilan : -1 sommet, -3 arêtes, -2 faces
- Détaillé en séance 4

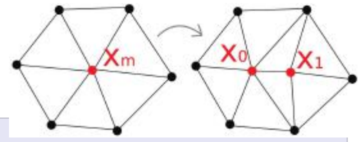


Division de sommet (vertex split)

Définition

Opération inverse de l'effondrement : un sommet devient une arête.

- Bilan : +1 sommet, +3 arêtes, +2 faces



Exercice

Dessiner les étapes de la transformation d'un tétraèdre en cube par divisions de sommet successives.

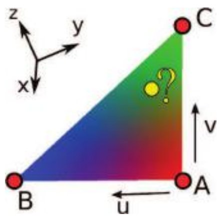
Interpolation d'attributs

Un **sommet** peut posséder divers attributs :

- Une position (coordonnées 3D)
- Une normale
- Une couleur
- Une coordonnée de texture
- D'autres paramètres scalaires (température, pression, ...) ou vectoriels (vitesse, force, ...)

Généralement une **face** interpole **linéairement** ces caractéristiques sur un élément de surface

- Exception : la normale



Cas d'une face triangulaire

Pour définir chacun de ces paramètres en chaque point d'un triangle ABC :

- Interpolation **bilinéaire** (repère local)

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, (u, v \in [0, 1]^2)$$

- **Coordonnées barycentriques**

$$P = uA + vB + wC, (u, v, w \in [0, 1]^3)$$

Remarque : extension à l'extrapolation

Exercice

Exprimer les poids barycentriques u, v et w en fonction de portions d'aires.

Géométrie discrète

- Maillage = approximation **linéaire par morceaux** d'une surface lisse
- Définitions discrètes des notions usuelles de géométrie à partir des valeurs sur les sommets ou faces
  - Normale, plan tangent
  - Courbures
  - Gradient d'une fonction, opérateur Laplacien
- Détails à la prochaine séance

Algorithmes globaux sur les maillages

- Beaucoup de littérature !
  - Voir `http://pmp-book.org/` et `http://alice.loria.fr/publications/papers/2007/SigCourseGeoProc/modeling-course.pdf`
- Exemples :
  - **Lissage/débruitage** de maillages
  - **Simplification** de maillages
  - **Reconstruction** de surfaces à partir d'un nuage de points
  - Paramétrisation de **surfaces maillées**
  - **Segmentation** de surfaces

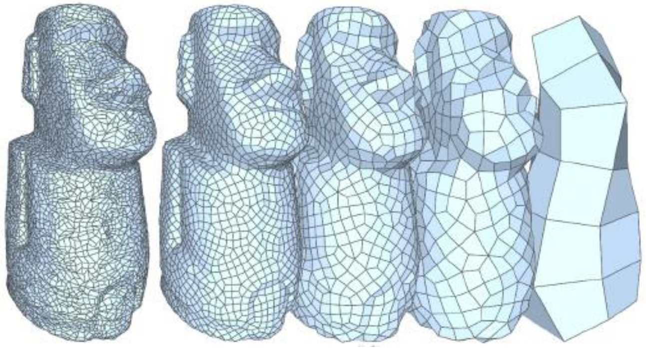
UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Lissage/débruitage de surfaces (séance 4)

[Fleishman et al. 2003]

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

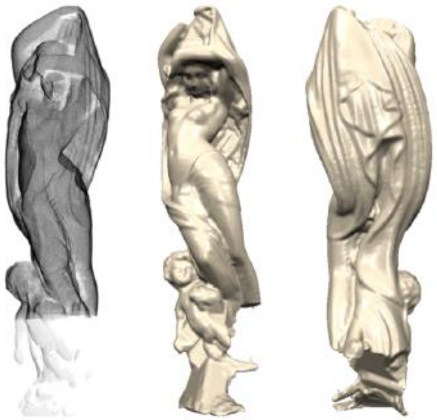
Simplification de maillages (séance 4)



[Tarini et al. 2010]

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

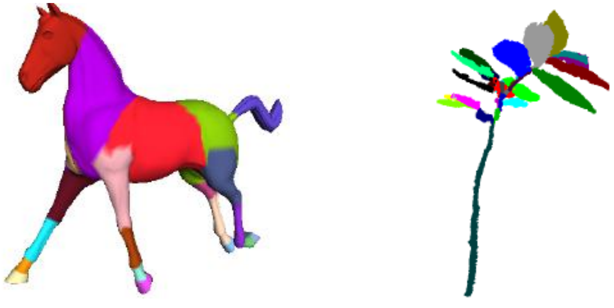
Reconstruction de surfaces (séance 5)



[Hornung/Kobbelt 2006]

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Segmentation de surfaces (projet)



Bibliothèques C++ utiles

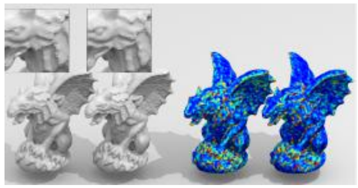
- **CGAL**
  - `http://www.cgal.org/`
  - Structures de données et algos
  - Très fournie
  - Bien maîtriser les templates . . .
- **OpenMesh**
  - `https://www.openmesh.org/`
  - Solution élégante
  - Pas de tutoriel (?)
- **Open3D**
  - `http://www.open3D.org/`
  - Nouveau, peu fournie pour l'instant
  - Maillages et nuages de points (cf. séance 6)
  - C++ et Python

Autres

- **PCL**
  - `http://pointclouds.org/`
  - Nuages de points ($\rightarrow$ séance 6)
- **Meshlab**
  - `http://meshlab.sourceforge.net/`
  - Logiciel de visualisation et traitement de surfaces
  - Maillages, nuages de points, . . .
- **Visionair**
  - `http://visionair.ge.imati.cnr.it/ontologies/shapes/`
  - Collection de maillages en accès libre
  - Beaucoup d'autres

Bilan

- Un maillage est une approximation C^0 d'une surface lisse
- **Topologie** + **géométrie**
  - Graphe + plongement
- Différentes **structures de données**
- Beaucoup d'**algorithmes** de manipulation/modification/analyse existent



Merci