Géométrie numérique

Séance 2 – Maillages

Franck Hétroy-Wheeler

M1 ISI – 2017-2018

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

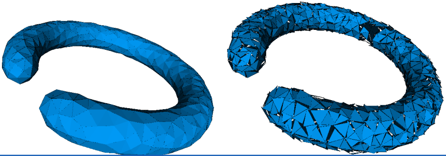
Définition

Maillage surfacique polygonal :

Triplet (V, E, F) avec :

- $V =$ ensemble de **sommets** (i.e. points de l'espace R^3) ;
- $E =$ ensemble d'**arêtes** (i.e. segments entre certains sommets de V) ;
- $F =$ ensemble **connexe** de **faces polygonales** bordées par les arêtes.

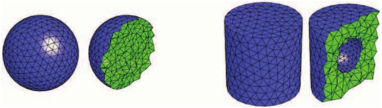
- Distinction sommet $\neq$ point
- Connexité :



Remarque

On peut imaginer des maillages 3D et non 2D : contiennent des **polyèdres** (hyperfaces)

- Discrétisation (tessellation) du **volume** intérieur d'un objet
- Utile pour le calcul des structures (**éléments finis**)
- Extension naturelle en dimensions supérieures



Faces d'un maillage

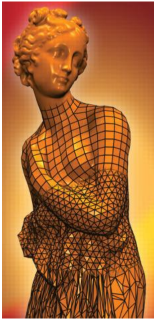
Dans le cas général, le maillage est formé de polygones quelconques

- Problème potentiel : non **coplanarité**
- Solutions : choix arbitraire d'un plan approchant, **triangulation**
- Convexité

Faces d'un maillage

En général, on utilise des maillages triangulaires ou quadrangulaires

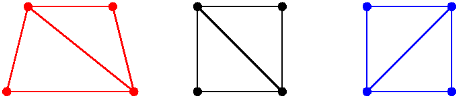
- **Triangles** : pas de problème de triangulation
- **Quadrangles** : forcément plans, ou choix arbitraire de la diagonale
- Dans le cas volumique : **tétraèdres**/**hexaèdres**



Géométrie et topologie

- La **géométrie** d'un maillage est donnée par les coordonnées 3D des sommets
- La **topologie** a trait aux relations de connectivité et voisinage entre sommets/arêtes/faces

$\Rightarrow$ Graphe **plongé** dans $\mathbb{R}^3$



Incidence

Définition

Deux éléments d'un maillage sont **incidents** si l'un est un bord de l'autre.

Peuvent être incidents :

- Un sommet et une arête
- Une arête et une face
- Un sommet et une face

Remarque :

- Même notion pour un graphe quelconque

Adjacence

Définition

Deux éléments de même dimension n d'un maillage sont **adjacents** s'ils partagent un élément de dimension $n-1$ ou $n+1$.

Peuvent être adjacents :

- Deux sommets
- Deux arêtes
- Deux faces
- En 3D : deux éléments de volume (tétraèdres, hexaèdres)

Remarques :

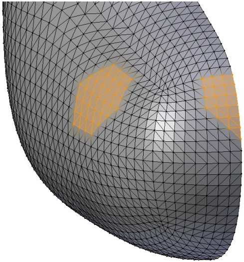
- Même notion pour un graphe quelconque
- Notion de **voisinage**

k-voisinage topologique

Définition

Pour un sommet v, ensemble des sommets joignables depuis v par au plus k relations d'adjacence successives.

- **Anneaux de voisinage**
- **Lien** : arêtes incidentes aux sommets d'un anneau
- Utilisation pour calculs géométriques (ex. : normale, plan tangent)



Valence d'un sommet v

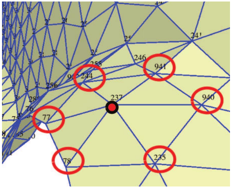
Définition

Nombre d'arêtes incidentes à v.

Définition équivalente

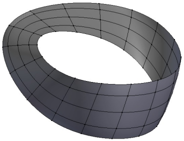
Nombre de 1-voisins de v/de sommets directement adjacents à v.

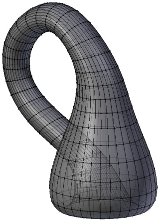
- Autre terme : **degré**



Orientation d'une face

- Ordonnancement cyclique des sommets incidents à la face
- Permet de donner un signe à la direction de la **normale**
- Utilisé pour définir l'**intérieur** et l'**extérieur** de l'objet
- Utilisé pour le rendu (*culling*)
- On peut souvent définir une même orientation pour tout le maillage, mais pas toujours :



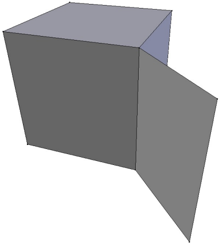


Variété (manifold)

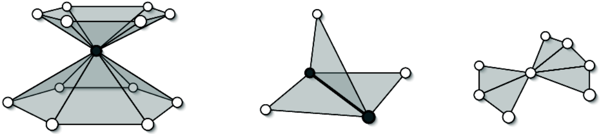
Définition

Un maillage est une 2-variété si le voisinage topologique de tout point est homéomorphe à un disque.

- **Variété à bord** (*with boundary*) : disque ou demi-disque
- Homéomorphisme : bijection continue
- Critère topologique et non géométrique
- 3-variété, *n*-variété



Singularités topologique



Courtesy Leif Kobbelt

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Caractéristique d'Euler

Formule d'Euler

Toute 2-variété avec ou sans bord vérifie la formule suivante :

$$\#V - \#E + \#F = 2(c - g) - b$$

avec :

- $\#V$, $\#E$, $\#F$ nombres de sommets/arêtes/faces
- c, g, b nombres de composantes connexes/trous/frontières

Remarque : formule généralisable en dimensions supérieures

- 3-variétés : nombres de tunnels et de cavités
- Nombres de Betti

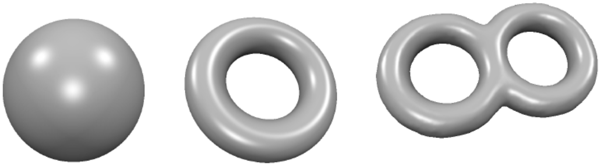
Caractéristique d'Euler

Définition

Le nombre de trous g est appelé le **genre** (*genus*) de la surface.

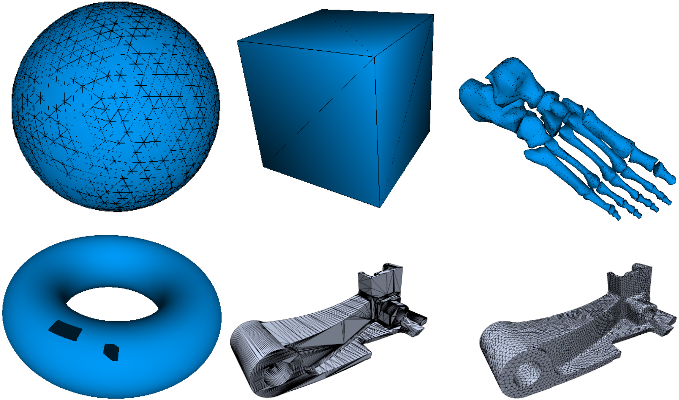
Définition

$\chi = \#V - \#E + \#F$ est appelée **caractéristique d'Euler** de la surface.



Exercice

Donner la caractéristique d'Euler des 6 surfaces ci-dessous.



Structure basée faces

- Structure de données basique : **liste des *n*-uplets de coordonnées** des sommets de chaque polygone
  - Exemple : 9 flottants pour un triangle
  - Exemple : format `STL`
- Avantage : très général
- Inconvénients majeurs :
  - **Redondance** : un sommet apparaît autant de fois que de polygones auxquels il appartient
  - Pas d'info **topologique** explicite : **soupe** de triangles

Structure basée faces indexée

Deux listes :

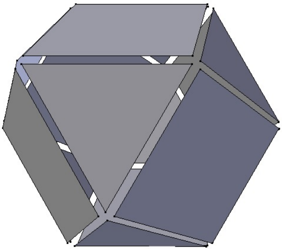
- **Triplets de flottants** précisant la position (coordonnées 3D) des sommets
- ***n*-uplets d'indices** de sommets représentant des polygones à n côtés
  - n peut être variable
- Exemples : formats `OBJ`, `OFF`, `VRML`

Exercice

Supposons qu'on stocke chaque entier ou flottant sur 4 octets et qu'on a un maillage triangulaire avec n sommets et m faces. Place mémoire nécessaire ? Gain par rapport à la structure précédente ?

Remarques

- Première liste = **géométrie**, seconde = **topologie** (connectivité)
- Pas de contrainte sur le type de faces ou de surfaces
- Pas d'information stockée sur les **arêtes**



Inconvénients

- Pas d'information sur les **voisins** des sommets et des faces
- Pas de lien depuis les sommets vers les faces

$\Rightarrow$ Obtenir la **liste des voisins** (sommets ou faces) d'un sommet peut coûter cher

Listes d'adjacence

On peut faciliter l'accès aux données de voisinage en créant des **listes d'adjacence/d'incidence** :

- liste sommet $\rightarrow$ sommets, faces ou arêtes
- liste arête $\rightarrow$ sommets, faces ou arêtes
- liste face $\rightarrow$ sommets, faces ou arêtes

Listes d'adjacence

On peut faciliter l'accès aux données de voisinage en créant des **listes d'adjacence/d'incidence** :

- liste sommet $\rightarrow$ sommets, faces ou arêtes
- liste arête $\rightarrow$ sommets, faces ou arêtes
- liste face $\rightarrow$ sommets, faces ou arêtes

Inconvénient : **redondance** d'information

- Volume de données
- Maintenabilité des données

Listes d'adjacence

On peut faciliter l'accès aux données de voisinage en créant des **listes d'adjacence/d'incidence** :

- liste sommet $\rightarrow$ sommets, faces ou arêtes
- liste arête $\rightarrow$ sommets, faces ou arêtes
- liste face $\rightarrow$ sommets, faces ou arêtes

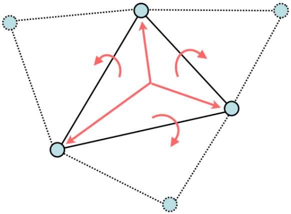
Inconvénient : **redondance** d'information

- Volume de données
- Maintenabilité des données

$\Rightarrow$ **Compromis** à trouver entre rapidité d'accès aux infos et volume de données à stocker

Structure basée faces avec listes d'adjacence

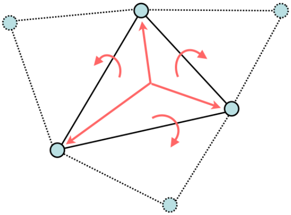
- **Sommet** : pointeur vers **une** face incidente
- **Face** :
  - Tableau de pointeurs vers les sommets de la face
  - Tableau de pointeurs vers les faces adjacentes
- Exemple : triangulation 2D dans `CGAL`



Courtesy Leif Kobbelt

Structure basée faces avec listes d'adjacence

- **Sommet** : pointeur vers **une** face incidente
- **Face** :
  - Tableau de pointeurs vers les sommets de la face
  - Tableau de pointeurs vers les faces adjacentes
- Exemple : triangulation 2D dans `CGAL`

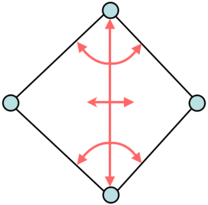


Courtesy Leif Kobbelt

- Permet de passer d'un sommet ou d'une face à ses voisins
- Assez coûteux, toujours pas d'info sur les arêtes

Structure basée arêtes

- La plus répandue : **Winged-edge** [Baumgart 1972]
- **Sommet** : pointeur vers **une** arête incidente
- **Arête** :
  - Pointeurs vers ses deux sommets extrémités
  - Pointeurs vers les deux faces incidentes
  - Pointeurs vers les deux arêtes précédentes et les deux arêtes suivantes dans ces faces
- **Face** : pointeur vers **une** arête incidente



Courtesy Leif Kobbelt

Inconvénients

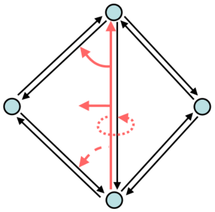
- Décrit forcément une **variété** (une arête est toujours partagée par deux faces)
- Assez coûteux
- Parcourir les voisins d'un sommet nécessite de **distinguer les cas**

Structure Half-edge

- [Mantyla 1988], [Kettner 1999]
- **Objectifs** : être plus compact que Winged-edge et ne pas avoir de cas à distinguer
- Idée : **orienter** les arêtes
  - "Couper" chaque arête dans le sens de la longueur
  - Une **demi-arête** dans chaque direction/dans chaque face incidente
  - Un choix d'orientation pour les faces (le même pour toutes) : horaire/anti-horaire

Structure Half-edge

- **Sommet** : pointeur vers **une** demi-arête incidente (dont il est source)
- **Demi-arête** :
  - Pointeur vers le sommet source
  - Pointeur vers la face à laquelle elle appartient
  - Pointeurs vers la demi-arête précédente et la demi-arête suivante dans la face
  - Pointeur vers la demi-arête tête-bêche
- **Face** : pointeur vers **une** demi-arête incidente



Courtesy Leif Kobbelt

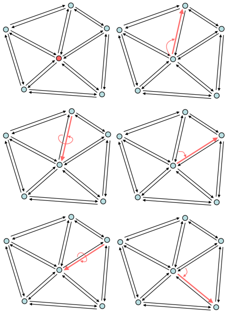
Exercice

Donner un algo permettant de parcourir tous les sommets voisins d'un sommet donné v.

Exercice

Donner un algo permettant de parcourir tous les sommets voisins d'un sommet donné v.

1. $e \leftarrow$ demi-arête sortante de v
2. $e \leftarrow$ demi-arête tête-bêche de e
3. $v_1 \leftarrow$ sommet source de e
4. $e \leftarrow$ demi-arête suivante de e
5. $e \leftarrow$ demi-arête tête-bêche de e
6. $v_2 \leftarrow$ sommet source de e
7. Etc.



Courtesy Leif Kobbelt

Exercice récapitulatif

Soit un maillage contenant n sommets, $3n$ arêtes et $2n$ faces. Comparer la place mémoire nécessaire pour les 5 structures vues précédemment : structure basée faces naïve, structure basée faces indexée, structure basée faces avec listes d'adjacences, Winged-edge, Half-edge.

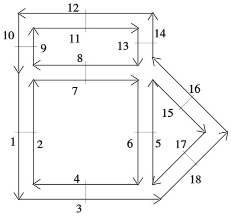
Exercice récapitulatif

Soit un maillage contenant n sommets, $3n$ arêtes et $2n$ faces. Comparer la place mémoire nécessaire pour les 5 structures vues précédemment : structure basée faces naïve, structure basée faces indexée, structure basée faces avec listes d'adjacences, Winged-edge, Half-edge.

1. $72n$
2. $36n$
3. $64n$
4. $120n$
5. $144n$ (réductible à $96n$ car pointeurs vers précédente et tête-bêche non nécessaires)

Carte combinatoire

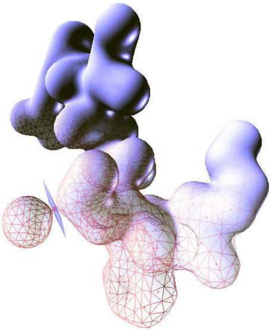
- Extension de la structure Half-edge en dimension finie quelconque
  - Demi-arêtes généralisées : **brins** (*darts*)
  - Arêtes têtes-bêches : **involutions** sur les brins
  - Arêtes suivantes : **permutations** sur les brins
- Représente la subdivision d'un espace nD fermé en cellules



Manipulation de maillages

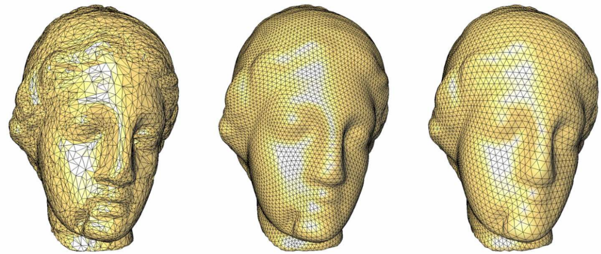
- Maillage = approximation **discrète** C^0 de la surface d'un objet continu et lisse
- Géométrie + topologie

  $\Rightarrow$ Calcul/modification au niveau **topologique** et/ou **géométrique**



Remaillage

- Objectif : maillage de meilleure **qualité**
  - **Topologique** : moins de sommets/faces, valence des sommets plus homogène, ...
  - **Géométrique** : triangles plus équilatéraux (F.E.M.), meilleure approximation de la surface lisse sous-jacente



Courtesy Pierre Alliez

Processus général

Tant que **critère global de qualité** non vérifié {

Choix d'une **opération topologique locale**

Mise à jour du maillage selon cette opération

Recalcul de la qualité

}

Remarque :

- Il existe aussi des approches globales
- Exemple : algorithme de Lloyd (k-means continu)

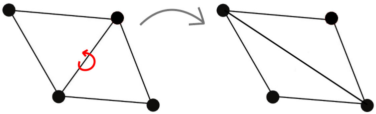
Basculement d'arête (edge flip)

Définition

Remplacement de deux **triangles** adjacents ABC et ACD formant un quadrilatère **convexe** par les triangles ABD et BCD.

Intérêts :

- Meilleure qualité locale du maillage
- Préliminaire à/Rend possible d'autres opérations (ex. : effondrement d'arête)

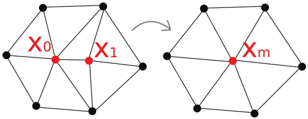


Effondrement d'arête (edge collapse)

Définition

Fusion de deux sommets adjacents par suppression de l'arête les reliant.

- Cas général : les deux faces incidentes perdent un côté
- Maillage triangulaire : les deux faces incidentes sont supprimées
  - Bilan : -1 sommet, -3 arêtes, -2 faces



UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Cas particuliers

Condition du lien [Dey et al. 1999]

Un effondrement de l'arête $v_1 v_2$ préserve le caractère variété de la surface si $Lk(v_1) \cap Lk(v_2) = Lk(v_1 v_2)$.

Demi-effondrement d'arête

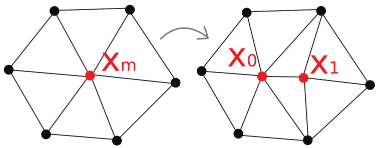
- Effondrement en un des deux sommets d'origine
- Un degré de liberté en moins : où placer le sommet résultant

Division de sommet (vertex split)

Définition

Opération inverse de l'effondrement : un sommet devient une arête.

- Bilan : +1 sommet, +3 arêtes, +2 faces
- Division de sommet restreinte : cf. demi-effondrement d'arête, on conserve la position du sommet



Interpolation d'attributs

Un **sommet** peut posséder divers attributs :

- Une position (coordonnées 3D)
- Une normale
- Une couleur
- Une coordonnée de texture
- D'autres paramètres scalaires (température, pression, ...) ou vectoriels (vitesse, force, ...)

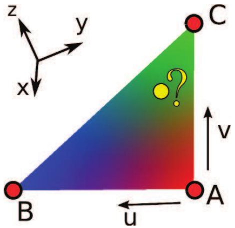
Interpolation d'attributs

Un **sommet** peut posséder divers attributs :

- Une position (coordonnées 3D)
- Une normale
- Une couleur
- Une coordonnée de texture
- D'autres paramètres scalaires (température, pression, ...) ou vectoriels (vitesse, force, ...)

Généralement une **face** interpole **linéairement** ces caractéristiques sur un élément de surface

- Exception : la normale



Cas d'une face triangulaire

Pour définir chacun de ces paramètres en chaque point d'un triangle ABC :

- Interpolation **bilinéaire** (repère local)

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, (u, v \in [0, 1]^2)$$

- **Coordonnées barycentriques**

$$P = uA + vB + wC, (u, v, w \in [0, 1]^3)$$

Remarques :

- Equivalence des approches (normalisation)
- Identification des poids barycentriques avec les portions d'aires
- Extension à l'extrapolation

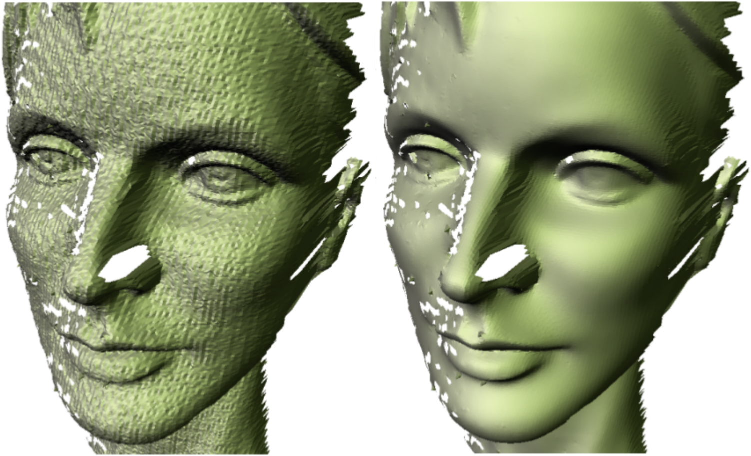
Géométrie discrète

- Maillage = approximation **linéaire par morceaux** d'une surface lisse
- Définitions discrètes des notions usuelles de géométrie à partir des valeurs sur les sommets ou faces
  - Normale, plan tangent
  - Courbures
  - Gradient d'une fonction, opérateur Laplacien
- Détails à la prochaine séance

Algorithmes globaux sur les maillages

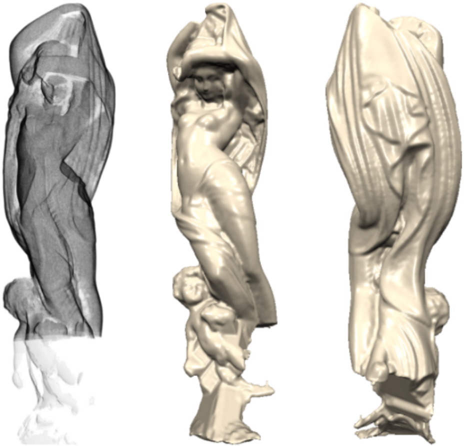
- Beaucoup de littérature !
  - Voir http://pmp-book.org/ et http://alice.loria.fr/publications/papers/2007/SigCourseGeoProc/modeling-course.pdf
- Exemples :
  - **Lissage/débruitage** de maillages
  - **Reconstruction** de surfaces à partir d'un nuage de points
  - **Simplification** de maillages
  - Paramétrisation de **surfaces maillées**
  - **Segmentation** de surfaces

Lissage/débruitage de surfaces (séance 4)



[Fleishman et al. 2003]

Reconstruction de surfaces (séance 5 + mini-projet)



[Hornung/Kobbelt 2006]

Bibliothèques C++ utiles

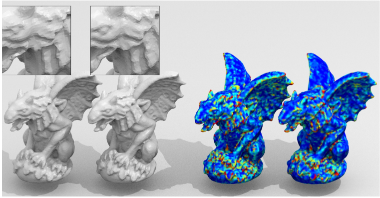
- **CGAL**
  - `http://www.cgal.org/`
  - Structures de données et algos
  - Très fournie
  - Bien maîtriser les templates ...
- **OpenMesh**
  - `https://www.openmesh.org/`
  - Solution élégante
  - Pas de tutoriel (?)
- **Eigen**
  - `http://eigen.tuxfamily.org/`
  - Calcul matriciel

Autres

- **Meshlab**
  - `http://meshlab.sourceforge.net/`
  - Logiciel de visualisation et traitement de surfaces
  - Maillages, nuages de points, ...
- **PCL**
  - `http://pointclouds.org/`
  - Nuages de points ($\rightarrow$ séance 6)
- **Visionair**
  - `http://visionair.ge.imati.cnr.it/ontologies/shapes/`
  - Collection de maillages en accès libre
  - Beaucoup d'autres

Bilan

- Un maillage est une approximation C^0 d'une surface lisse
- **Topologie** + **géométrie**
  - Graphe + plongement
- Différentes **structures de données**
- Beaucoup d'**algorithmes** de manipulation/modification/analyse existent



Merci