

Géométrie numérique

Séance 3 – Géométrie différentielle discrète

Franck Hétroy-Wheeler

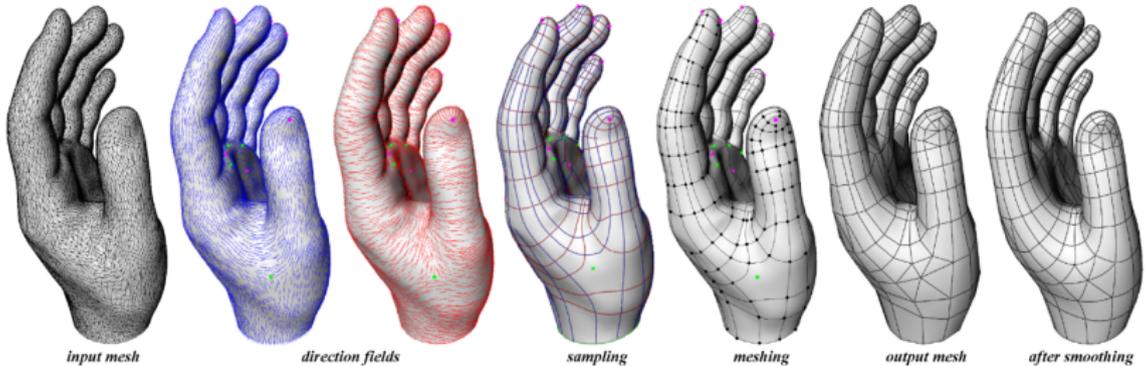
M1 ISI – 2017-2018





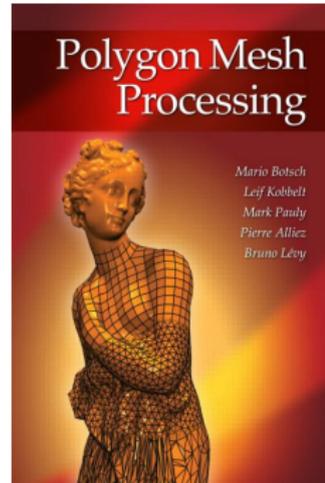
- ▶ Maillage = surface **non lisse**
- ▶ **Hypothèse** : approximation linéaire par morceaux d'une surface lisse sous-jacente
- ▶ **Objectif** : trouver des approximations des propriétés différentielles de cette surface sous-jacente
 - ▶ Normale
 - ▶ Gradient
 - ▶ Courbures
 - ▶ ...

- ▶ Segmentation
- ▶ Remaillage
- ▶ Lissage/débruitage
- ▶ ...



[Alliez et al. 2003]

- ▶ Chapitre 3 du livre “Polygon Mesh Processing” :
<http://www.pmp-book.org/>
- ▶ Discrete Differential Geometry
Forum :
<http://ddg.cs.columbia.edu/>



Introduction

Rappels de géométrie différentielle

Courbe paramétrique

Surface paramétrique

Géométrie discrète sur les maillages triangulaires

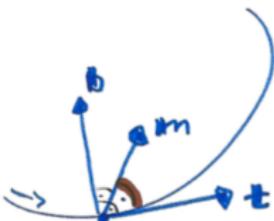
Extensions

Bilan

- ▶ $\mathbf{x} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^3
- ▶ Vecteurs tangent/normal/binormal ?

- ▶ $\mathbf{x} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^3
- ▶ Vecteurs tangent/normal/binormal ?
 - ▶ **Vecteur tangent** : $\mathbf{t}(s) = \frac{\mathbf{x}'(s)}{\|\mathbf{x}'(s)\|}$
 - ▶ **Vecteur normal** : $\mathbf{m}(s) = \frac{\mathbf{x}''(s)}{\|\mathbf{x}''(s)\|}$
 - ▶ **Vecteur binormal** : $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{m}(s)$
 - ▶ **Repère de Serret-Frénet** : $(\mathbf{x}(s); \mathbf{t}(s), \mathbf{m}(s), \mathbf{b}(s))$

- ▶ **Courbure** : $\kappa(s) = \|\mathbf{x}''(s)\|$
 - ▶ Mesure la déviation par rapport à une droite
- ▶ **Torsion** : $\tau(s) = \frac{\det[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}'''(s)]}{\kappa^2(s)}$
 - ▶ Mesure le défaut de planarité



- ▶ $\mathbf{X} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^r
- ▶ Analogues vecteurs tangent/normal/binormal ?

- ▶ $\mathbf{X} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^r
- ▶ Analogues vecteurs tangent/normal/binormal ?
 - ▶ On note $\mathbf{X}_u = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}$ et $\mathbf{X}_v = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}$
 - ▶ **Plan tangent** en p : $T_p \mathbf{X}$ = plan passant par p et engendré par les vecteurs $\mathbf{X}_u(p)$ et $\mathbf{X}_v(p)$
 - ▶ **Vecteur normal** : $\mathbf{n}(p) = \frac{\mathbf{X}_u(p) \times \mathbf{X}_v(p)}{\|\mathbf{X}_u(p) \times \mathbf{X}_v(p)\|}$
 - ▶ $(\mathbf{X}(p); \mathbf{X}_u(p), \mathbf{X}_v(p), \mathbf{n}(p))$ forme aussi un repère local

▶ On note de manière analogue $\mathbf{X}_{uu} = \frac{\partial \mathbf{X}_u}{\partial u} = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u^2}$, etc.

▶ **Première forme fondamentale :**

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v & \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v \end{bmatrix}$$

▶ **Seconde forme fondamentale :**

$$\mathbf{II} = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu}^T \mathbf{n} & \mathbf{x}_{uv}^T \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{uv}^T \mathbf{n} & \mathbf{x}_{vv}^T \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

▶ **Opérateur de forme**/Application de Weingarten :

$$\mathbf{W} := \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix}$$

- ▶ \mathbf{I} = outil géométrique (**tenseur métrique**)
 - ▶ Permet de mesurer aires locales, longueurs de courbes sur la surface, angles, ...
 - ▶ Exemple : anisotropie locale de la surface : décomposition spectrale de \mathbf{I}

- ▶ \mathbf{I} = outil géométrique (**tenseur métrique**)
 - ▶ Permet de mesurer aires locales, longueurs de courbes sur la surface, angles, ...
 - ▶ Exemple : anisotropie locale de la surface : décomposition spectrale de \mathbf{I}
- ▶ Propriétés différentielles ne dépendant que de \mathbf{I} sont dites **intrinsèques**
 - ▶ Ne dépendent pas de la paramétrisation
 - ▶ Ne dépendent pas de l'espace 3D

- ▶ \mathbb{II} = propriétés **extrinsèques** de la surface
 - ▶ Dépendent du plongement dans l'espace ambiant \mathbb{R}^3

- ▶ **\mathbf{II}** = propriétés **extrinsèques** de la surface
 - ▶ Dépendent du plongement dans l'espace ambiant \mathbb{R}^3
- ▶ **\mathbf{W}** détermine les directions de courbure locale de la surface
 - ▶ Valeurs propres = courbures principales
 - ▶ Vecteurs propres = directions principales de courbure

- ▶ **Courbures principales et directions principales de courbure :**

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}_1 & \bar{\mathbf{t}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}_1 & \bar{\mathbf{t}}_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

- ▶ **Courbure moyenne :** $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{trace}(\mathbf{W})$
- ▶ **Courbure de Gauss :** $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(\mathbf{W})$

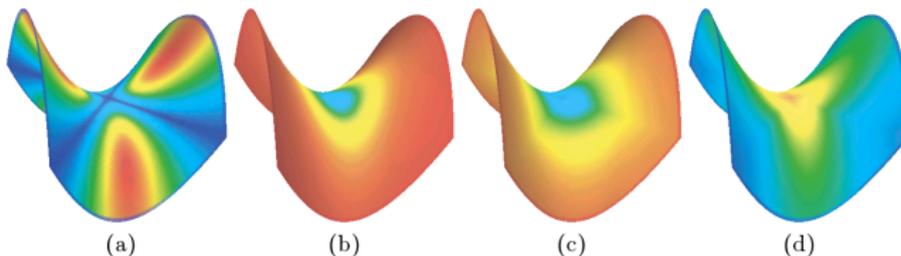


Fig. 5. Curvature plots of a triangulated saddle using pseudo-colors: (a) Mean, (b) Gaussian, (c) Minimum, (d) Maximum.

[Meyer et al. 2003]

▶ **Opérateur de Laplace** (Laplacien) :

- ▶ f fonction différentiable de deux variables dans un espace euclidien
- ▶ $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = f_{uu} + f_{vv}$

► **Opérateur de Laplace** (Laplacien) :

- ▶ f fonction différentiable de deux variables dans un espace euclidien
- ▶ $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = f_{uu} + f_{vv}$

► **Opérateur de Laplace-Beltrami** :

- ▶ f définie sur une surface \mathbf{X} variété lisse
- ▶ $\Delta_{\mathbf{X}} f = \operatorname{div}_{\mathbf{X}}(\operatorname{grad}_{\mathbf{X}} f)$
- ▶ Opérateur intrinsèque
- ▶ Pour \mathbf{u} la fonction qui associe à tout point de \mathbf{X} ses coordonnées :

$$\Delta_{\mathbf{X}} \mathbf{u} = -2H\mathbf{n}$$

Introduction

Rappels de géométrie différentielle

Géométrie discrète sur les maillages triangulaires

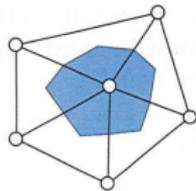
Extensions

Bilan

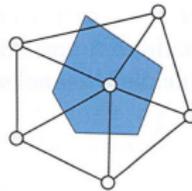
$$f'(x) \sim \frac{1}{dx}(f(x + dx) - f(x))$$

- ▶ Besoin d'exprimer la valeur d'une quantité géométrique **au voisinage** de tout point x
- ▶ Maillage = approximation linéaire par morceaux d'une surface lisse
⇒ calcul en tout **sommet**

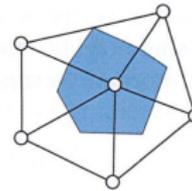
- ▶ Topologique : k -ring
- ▶ Géométrique : prise en compte de l'**aire** des faces
 - ▶ Barycentre
 - ▶ Centre du cercle circonscrit



Barycentric cell



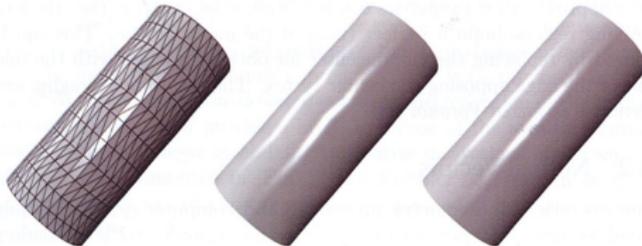
Voronoi cell



Mixed Voronoi cell

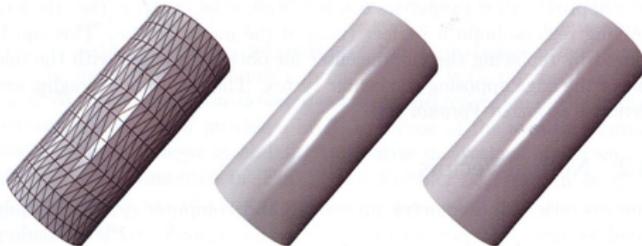
Courtesy M. Botsch et al.

- ▶ Moyenne **pondérée** des normales aux faces incidentes
- ▶ Poids uniformes : problème pour faces d'aires différentes
- ▶ Autre choix simples : **aire** de la face ou **angle** de la face au sommet
- ▶ Solutions plus élaborées : voir le cours de Keenan Crane
<http://brickisland.net/cs177/?p=217>



Courtesy M. Botsch et al.

- ▶ Moyenne **pondérée** des normales aux faces incidentes
- ▶ Poids uniformes : problème pour faces d'aires différentes
- ▶ Autre choix simples : **aire** de la face ou **angle** de la face au sommet
- ▶ Solutions plus élaborées : voir le cours de Keenan Crane
<http://brickisland.net/cs177/?p=217>



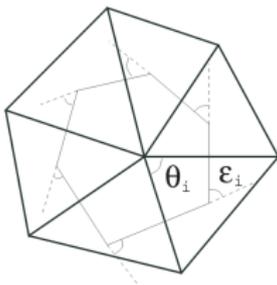
Courtesy M. Botsch et al.

- ▶ **Plan tangent** à un sommet : plan passant par le sommet et orthogonal à sa normale

- Formule de Gauss-Bonnet pour une surface S à bord régulier par morceaux :

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S) - \sum_i \epsilon_i$$

- $\chi(S)$ = caractéristique d'Euler, ϵ_i = angles externes de la frontière
- $\Rightarrow K(v_i) = \frac{1}{A_i}(2\pi - \sum_i \theta_i)$ avec S voisinage de v_i
- **Défaut d'angle**



[Meyer et al. 2003]

- ▶ **Courbure moyenne** définie à partir du Laplacien :

$$\Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = -2H\mathbf{n}$$

- ▶ On en déduit

$$H(v_i) = \frac{1}{2} \|\Delta \mathbf{u}_i\|$$

avec \mathbf{u}_i fonction qui associe à un sommet ses coordonnées, évaluée en v_i

- ▶ **Courbure moyenne** définie à partir du Laplacien :

$$\Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = -2H\mathbf{n}$$

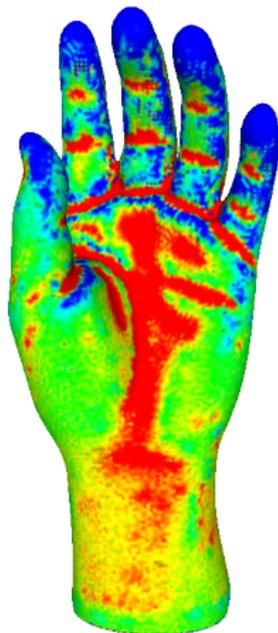
- ▶ On en déduit

$$H(v_i) = \frac{1}{2} \|\Delta \mathbf{u}_i\|$$

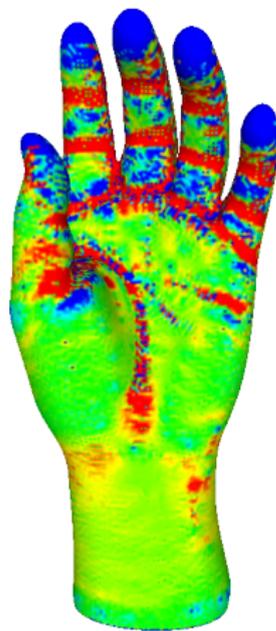
avec \mathbf{u}_i fonction qui associe à un sommet ses coordonnées, évaluée en v_i

- ▶ **Courbures principales** définies à partir des courbures moyenne et gaussienne :

$$\kappa_{1,2}(v_i) = H(v_i) \pm \sqrt{H(v_i)^2 - K(v_i)}$$

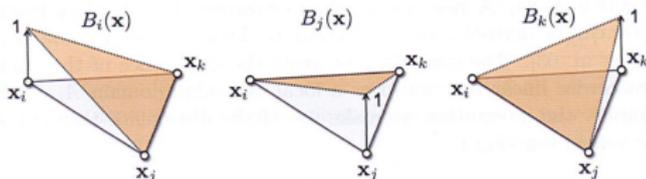


Courbure moyenne



Courbure gaussienne

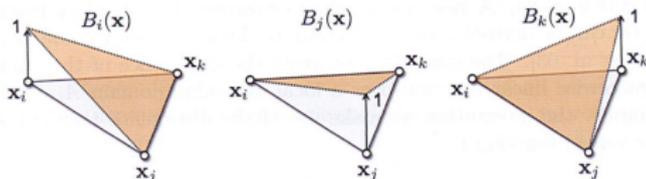
- ▶ f donnée en chaque sommet et étendue linéairement par morceaux sur les arêtes et les faces
- ▶ S'exprime comme combinaison linéaire de **fonctions de base** :



Courtesy M. Botsch et al.

$$f(x) = f(x_i)B_i(x) + f(x_j)B_j(x) + f(x_k)B_k(x)$$

- ▶ f donnée en chaque sommet et étendue linéairement par morceaux sur les arêtes et les faces
- ▶ S'exprime comme combinaison linéaire de **fonctions de base** :



Courtesy M. Botsch et al.

$$f(x) = f(x_i)B_i(x) + f(x_j)B_j(x) + f(x_k)B_k(x)$$

- ▶ On en déduit :

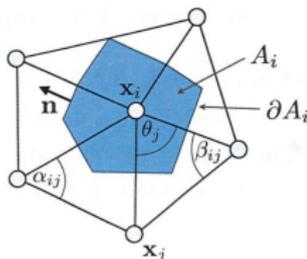
$$\nabla f(x) = \frac{1}{2A_{ijk}} ((f(x_j) - f(x_i))(x_i - x_k)^\perp + (f(x_k) - f(x_i))(x_j - x_i)^\perp)$$

avec \perp rotation 90° dans le plan du triangle

- ▶ Divergence du gradient
- ▶ S'exprime généralement sous la forme

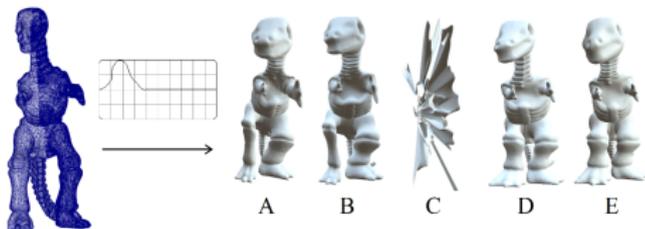
$$\Delta f(v_i) = \frac{1}{W_i} \sum_{v_j \in N(v_i)} w_{ij} (f(v_j) - f(v_i))$$

- ▶ [Taubin 1995] : poids uniformes ($w_{ij} = 1$, $W_i = \#(N(v_i))$)
- ▶ [Pinkall et Polthier 1993], [Meyer et al. 2003] : **poids cotangents** ($w_{ij} = \cotan\alpha_{ij} + \cotan\beta_{ij}$, $W_i = 2A_i$)



Courtesy M. Botsch et al.

- **Symétrisation** [Vallet et Lévy 2008] : $\sqrt{A_i A_j}$ au lieu de A_i



[Vallet et Lévy 2008]

- **No free lunch** [Wardetzky et al. 2007] : quelque soit la définition du Laplacien, il existe toujours un maillage où il ne vérifie pas une propriété intéressante (parmi 4)
- Définitions alternatives **convergeant** vers l'opérateur lisse [Wang et al. 2013], [Xu et al. 2013]

Introduction

Rappels de géométrie différentielle

Géométrie discrète sur les maillages triangulaires

Extensions

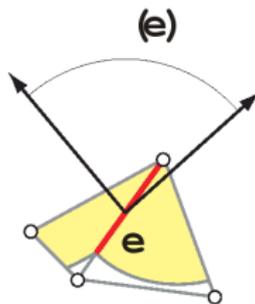
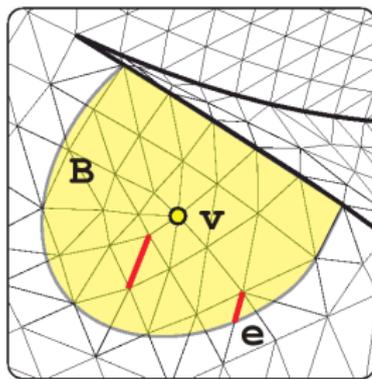
Bilan

- ▶ Problème des définitions précédentes : pas **intrinsèques**
 - ▶ Deux maillages approchant la même surface \Rightarrow courbures différentes
- ▶ [Cohen-Steiner et Morvan 2003] : **tenseur de courbure** $\tau(v)$ en un sommet v
- ▶ Vecteurs propres de $\tau(v)$ = normale en v + directions principales de courbure (cf. W)
- ▶ **Converge** vers les valeurs dans le cas lisse

► Formule :

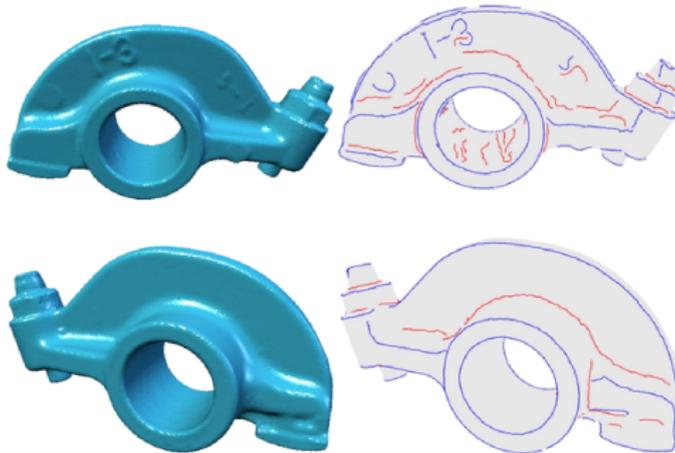
$$\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \frac{1}{|B|} \sum_{\text{edges } e} \beta(e) |e \cap B| \bar{e} \bar{e}^t$$

avec $\bar{e} = e / \|e\|$



[Alliez et al. 2003]

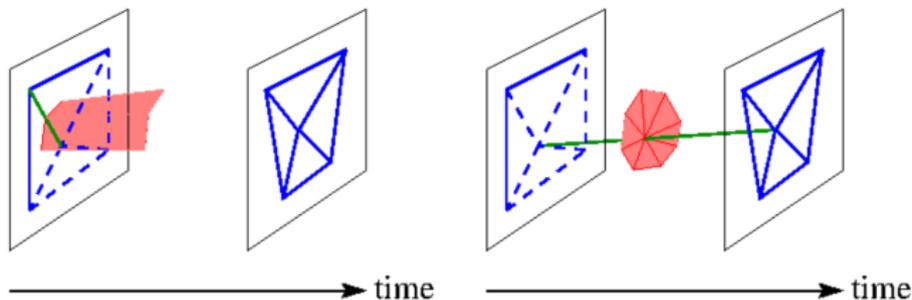
- Définition : **extrema des courbures principales** le long de la direction de courbure correspondante



[Yoshizawa et al. 2005]

- ▶ Calcul difficile car **quantités différentielles du second ordre**
- ▶ Méthodes existantes nécessitent presque toutes un **post-filtrage**
- ▶ Voir notamment les travaux d'Alexander Belyaev

- ▶ **Surfaces simpliciales** (non variétés) : [Bobenko et Springborn 2007]
- ▶ **Maillages polygonaux** : [Alexa et Wardetzky 2011]
- ▶ **Nuages de points** : [Belkin et al. 2009], [Liu et al. 2012], [Petronetto et al. 2013]
- ▶ **Séquences de maillages** : [Fernández Abrevaya et al. 2016]



[Fernández Abrevaya et al. 2016]

- ▶ Géométrie différentielle des surfaces : **normale**, **courbures**, opérateur de **Laplace**
- ▶ Maillage = approximation **linéaire par morceaux** d'une surface lisse
- ▶ Quantités différentielles : besoin d'une notion de **voisinage**
- ▶ Problème de la **convergence**

Merci

