

Géométrie numérique

Séance 6 – Traitement des nuages de points

Franck Hétroy-Wheeler

M1 ISI – 2017-2018



Principe

La surface est définie par un ensemble de points supposés en faire partie.

Très répandu grâce aux scanners laser et caméras RGBD (Kinect)

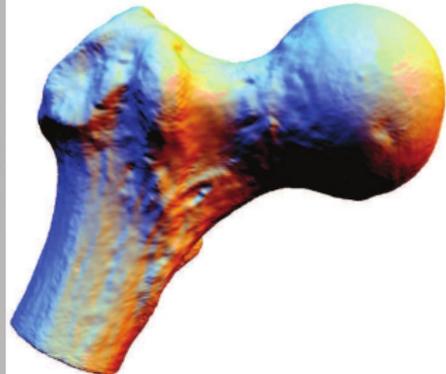
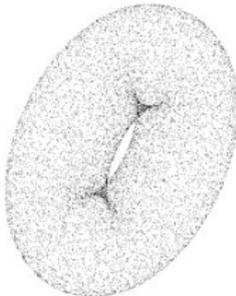


Avantages :

- ▶ Donnée **simple** et compacte
- ▶ **Visualisation** rapide

Inconvénients :

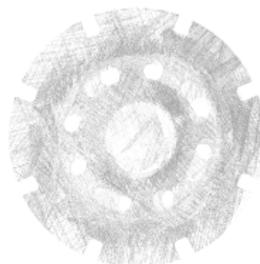
- ▶ Pas de **structure** / d'information topologique (voisines)
- ▶ Densité nécessaire



- ▶ Modèles scannés : habituellement des **millions** voire des milliards de points



1.8M points



2.3M points



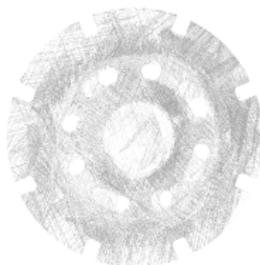
29M points

<http://visionair.ge.imati.cnr.it/ontologies/shapes/>

- ▶ Modèles scannés : habituellement des **millions** voire des milliards de points



1.8M points



2.3M points



29M points

<http://visionair.ge.imati.cnr.it/ontologies/shapes/>

- ▶ ⇒ **Reconstruction** de maillage impossible (trop coûteuse en temps/place mémoire)
- ▶ Chaque **face** d'un maillage ne serait projetée que sur **ou ou deux pixel(s)** de l'image

Contexte

Représentation par points

Géométrie différentielle discrète

Application : simplification

Conclusion

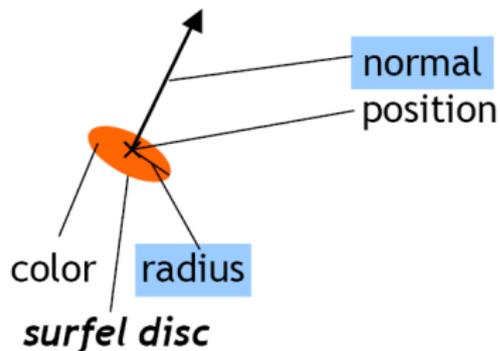


- ▶ Proposé par H. Pfister et al. à SIGGRAPH 2000 (“Surfels : Surface Elements as Rendering Primitives”)
- ▶ Définition : élément de **surface** (analogie pixel/voxel)

- ▶ Proposé par H. Pfister et al. à SIGGRAPH 2000 (“Surfels : Surface Elements as Rendering Primitives”)
- ▶ Définition : élément de **surface** (analogie pixel/voxel)
- ▶ En fait un **disque**

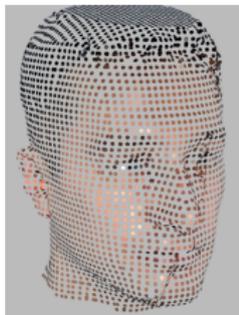
Attributs :

- ▶ Position 3D
- ▶ Couleur
- ▶ **Normale**
- ▶ **Rayon**



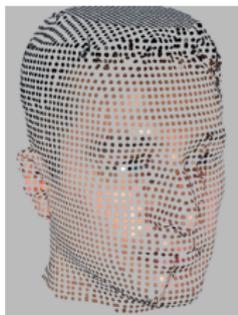
► Rendu

- Objectif d'origine
- L'utilisateur veut voir une **surface** (pas de trou)
- Tout un pipeline de calcul (cf. slide suivant)

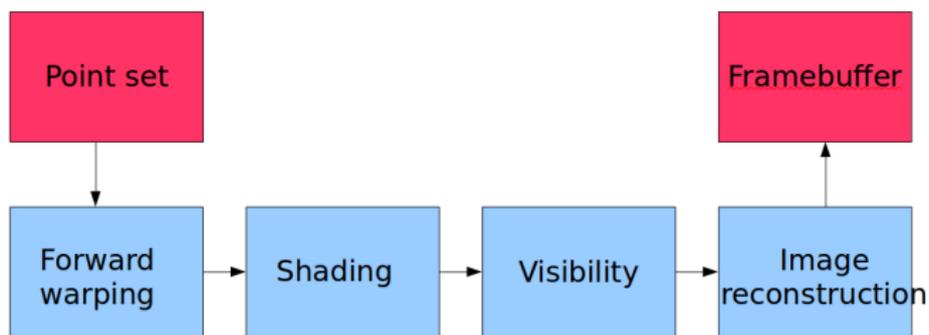


► Rendu

- Objectif d'origine
- L'utilisateur veut voir une **surface** (pas de trou)
- Tout un pipeline de calcul (cf. slide suivant)



- Objet en **mouvement** avec notamment changement de topologie
 - Fluide



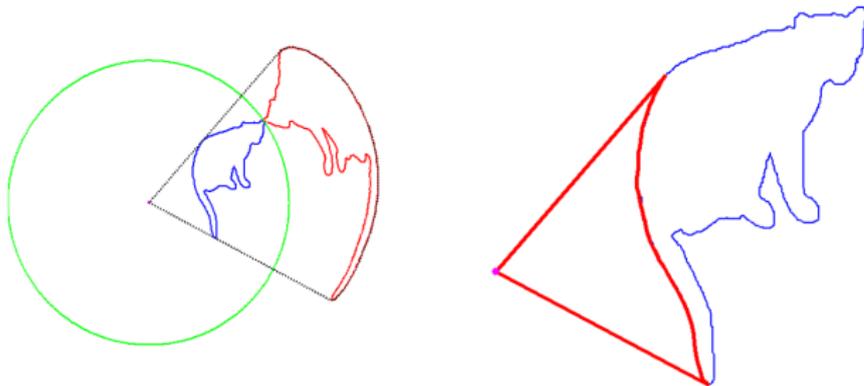
[M. Zwicker et al. 2002]

Deux premières étapes classiques

- ▶ Calculées simultanément
- ▶ Objectif 1 : éliminer les points non vus depuis la caméra
- ▶ Objectif 2 : reconstruire une surface continue à partir des points vus

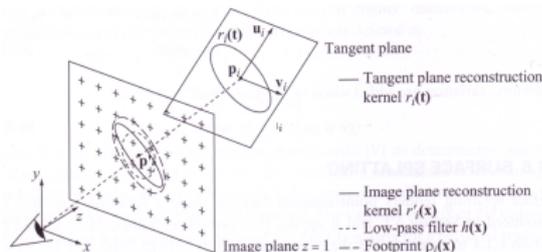


- ▶ Opérateur "Hidden Point Removal" (HPR) [Katz et al. 2007]

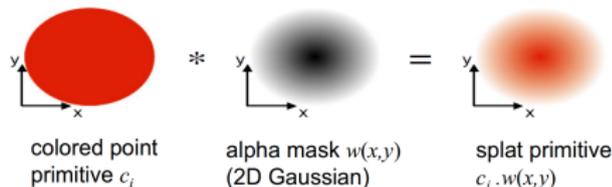


- ▶ Autre solution : **Z-buffer** après calcul des surfels

- ▶ Surface **splatting** [Zwicker et al. 2001]



- ▶ Calcul **normale** : cf. [Hoppe et al. 1992]
- ▶ Calcul **rayon** : de manière à couvrir la surface (pas de trou)
- ▶ **Splat** : **floutage** de chaque surfel autour du point selon un noyau gaussien



Contexte

Représentation par points

Géométrie différentielle discrète

Voisinage

Approximation locale du plan tangent

Approximation locale de la surface

Application : simplification

Conclusion

On suppose que la **surface sous-jacente** est une **2-variété lisse**

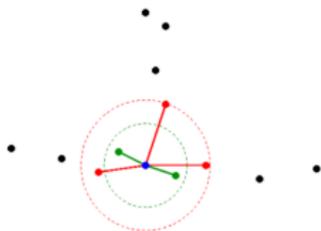
On suppose que la **surface sous-jacente** est une **2-variété lisse**

1. Approximation du **voisinage** d'un point
2. Approximation locale du **plan tangent** et de la courbure : **ACP**
3. Approximation locale de la **surface** autour d'un point : **MLS**

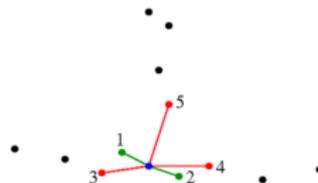


- ▶ Pas d'information explicite de voisinage (connectivité) \Rightarrow **distance Euclidienne** seule possibilité
- ▶ Hypothèse : nuage de points suffisamment **dense**

- ▶ Pas d'information explicite de voisinage (connectivité) \Rightarrow **distance Euclidienne** seule possibilité
- ▶ Hypothèse : nuage de points suffisamment **dense**
- ▶ Méthodes :

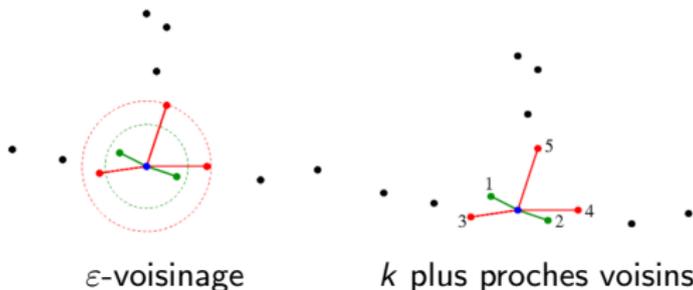


ε -voisinage



k plus proches voisins

- ▶ Pas d'information explicite de voisinage (connectivité) \Rightarrow **distance Euclidienne** seule possibilité
- ▶ Hypothèse : nuage de points suffisamment **dense**
- ▶ Méthodes :



- ▶ Supposent une distribution **isotropique** des points
- ▶ Calcul rapide avec des structures **hiérarchiques** (octree, ...)

Contexte

Représentation par points

Géométrie différentielle discrète

Voisinage

Approximation locale du plan tangent

Approximation locale de la surface

Application : simplification

Conclusion

- ▶ Objectif : estimation **rapide** en tout point x_i :
 - ▶ du plan tangent
 - ▶ de la normale à la surface
 - ▶ des courbures

- ▶ Objectif : estimation **rapide** en tout point x_i :
 - ▶ du plan tangent
 - ▶ de la normale à la surface
 - ▶ des courbures
- ▶ Utilisation du **voisinage** de x_i tel que défini précédemment
- ▶ Outil : analyse de **covariance**

- ▶ x_i point du nuage, \bar{x} **centroïde** (isobarycentre) du voisinage $N(x_i)$ de x_i :

$$\bar{x} = \frac{1}{|N(x_i)|} \sum_{x_j \in N(x_i)} x_j$$

- ▶ **Matrice de covariance** :

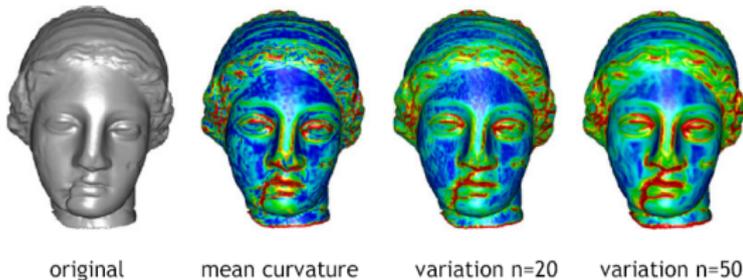
$$C = \begin{pmatrix} x_{j_1} - \bar{x} \\ \vdots \\ x_{j_k} - \bar{x} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} x_{j_1} - \bar{x} \\ \vdots \\ x_{j_k} - \bar{x} \end{pmatrix}$$

- ▶ Valeurs propres $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$, vecteurs propres associés v_0 , v_1 et v_2
- ▶ Chaque λ_j mesure la **variation** de $N(x_i)$ le long de v_j
- ▶ Variation totale :

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = \sum_{x_j \in N(x_i)} \|x_j - \bar{x}\|^2$$

- ▶ **Normale** à la surface : v_0
- ▶ **Plan tangent** : plan défini par v_1 et v_2 passant par x_i
- ▶ Axe de plus grande variation : v_2

- ▶ **Normale** à la surface : v_0
- ▶ **Plan tangent** : plan défini par v_1 et v_2 passant par x_i
- ▶ Axe de plus grande variation : v_2
- ▶ **Variation de surface** : $\sigma(x_i) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}$
 - ▶ $\sigma(x_i) = 0$: voisinage plan
 - ▶ $\sigma(x_i) = 1/3$: distribution isotropique sur une sphère
 - ▶ Approximation de la **courbure moyenne**



n = nombre de points dans le voisinage [Pauly et al. 2002]

- ▶ Matrice de covariance des **normales** aux points : $C' = \sum_{x_j \in N(x_i)} n_j^T \cdot n_j$
- ▶ Valeurs propres $\lambda'_0 \leq \lambda'_1 \leq \lambda'_2$, vecteurs propres v'_0 , v'_1 et v'_2

- ▶ Matrice de covariance des **normales** aux points : $C' = \sum_{x_j \in N(x_i)} n_j^T \cdot n_j$
- ▶ Valeurs propres $\lambda'_0 \leq \lambda'_1 \leq \lambda'_2$, vecteurs propres v'_0 , v'_1 et v'_2
- ▶ Variation de normale : $\sigma'(x_i) = \lambda'_1$
- ▶ [Garland 1999] : si la surface sous-jacente est lisse alors, quand l'échantillonnage $\rightarrow \infty$,
 - ▶ v'_2 converge vers la normale moyenne
 - ▶ v'_1 converge vers la **direction de courbure maximum**
 - ▶ v'_0 converge vers la **direction de courbure minimum**

Contexte

Représentation par points

Géométrie différentielle discrète

Voisinage

Approximation locale du plan tangent

Approximation locale de la surface

Application : simplification

Conclusion

- ▶ Echantillon $\{x_i\}$, valeur f_i connue en chaque x_i
- ▶ Objectif : trouver une fonction f **d'une certaine régularité** approchant au mieux les f_i
 - ▶ Exemples : plan, quadrique, ..., **polynôme**

- ▶ Echantillon $\{x_i\}$, valeur f_i connue en chaque x_i
- ▶ Objectif : trouver une fonction f **d'une certaine régularité** approchant au mieux les f_i
 - ▶ Exemples : plan, quadrique, ..., **polynôme**
- ▶ Approximation aux moindres carrés :

$$f_{LS} = \operatorname{argmin} \sum_i \|f(x_i) - f_i\|^2$$

$$f_{WLS, \bar{x}} = \operatorname{argmin} \sum_i \theta(\|\bar{x} - x_i\|) \|f(x_i) - f_i\|^2$$

- ▶ Les **poids** θ dépendent de la **distance à un point** \bar{x}
- ▶ Décroissants et tendent vers 0
- ▶ Choix standard : exponentielle

- ▶ Approximation par moindres carrés pondérés **adaptée** autour du point auquel on se trouve

$$f_{MLS} : x \mapsto f_{WLS,x}(x)$$

- ▶ Théorème [Levin 1998] : f_{MLS} est C^1 **si et seulement si** θ est C^1
- ▶ Pour en savoir plus :

<http://www.nealen.com/projects/mls/asapmls.pdf>

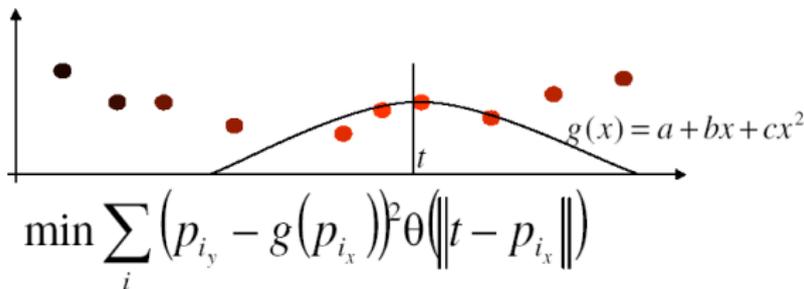
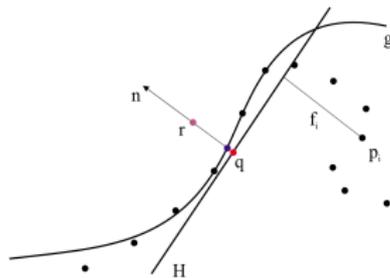


Figure : Marc Alexa

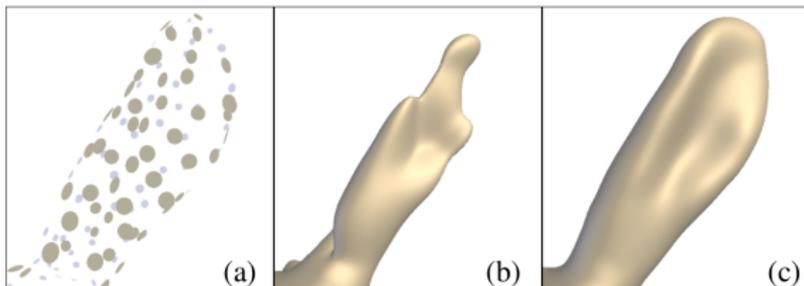
- ▶ M. Alexa et al., “Computing and Rendering Point Set Surfaces”, TVCG 2003
- ▶ Objectif : surface S **lisse** **approchant** les points x_i
 - ▶ Bruit



1. Pour tout point r de l'espace, calcul d'un **plan** H par WLS
 - ▶ Ne passe pas nécessairement par r
2. Calcul de S autour de r par **MLS**
 - ▶ Poids associés aux x_i dépendent de la distance de leur **projection** sur H à la projection q de r sur H
3. Projection de r sur S



- ▶ G. Guennebaud and M. Gross, “Algebraic Point Set Surfaces”, SIGGRAPH 2007
- ▶ **Problème** approche Alexa : calcul du **plan** très **instable** dans les régions de courbure importante si échantillonnage insuffisant
- ▶ Idée : **fitter** plutôt une **sphère** (ou surface algébrique d'ordre supérieure)
- ▶ Également : algos plus robustes et plus rapides, prise en compte des arêtes vives



Contexte

Représentation par points

Géométrie différentielle discrète

Application : simplification

Conclusion

- ▶ Objectif : **réduire** le nombre de points
 - ▶ Visualisation interactive, calculs plus rapides
- ▶ Problèmes : densité non uniforme, approximation de la **surface sous-jacente**
- ▶ Nuage résultat \subset nuage initial (i.e. **sous-échantillonnage**)?
 - ▶ Réduction du bruit

- ▶ S et S' définies respectivement par $X = \{x_i\}$ et $X' = \{x'_i\}$
 - ▶ MLS
- ▶ On **sur-échantillonne** S à partir de $X : Y$
 - ▶ $\forall y \in Y, d(y, S')$ par projection MLS (cf. étape 3 Alexa)

- ▶ S et S' définies respectivement par $X = \{x_i\}$ et $X' = \{x'_i\}$
 - ▶ MLS
- ▶ On **sur-échantillonne** S à partir de X : Y
 - ▶ $\forall y \in Y, d(y, S')$ par projection MLS (cf. étape 3 Alexa)
- ▶ Erreur max : **distance de Hausdorff**

$$d_{\max}(S, S') = \max_{y \in Y} d(y, S')$$

- ▶ Erreur moyenne :

$$d_{\text{moy}}(S, S') = \frac{1}{|Y|} \sum_{y \in Y} d(y, S')$$

- ▶ Proposées d'abord dans le cas des **maillages**
- ▶ Chacune a ses avantages/inconvénients (voir plus loin)
- ▶ Adaptation au cas des nuages de points : calcul de **voisinage**

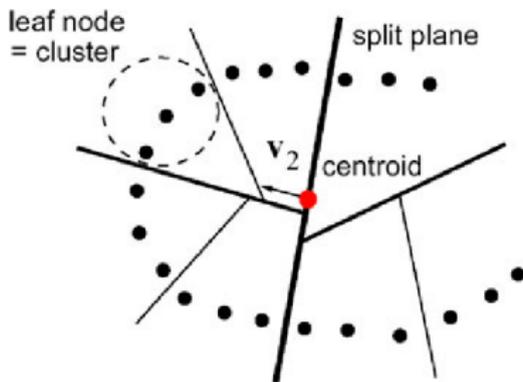
- ▶ Proposées d'abord dans le cas des **maillages**
 - ▶ Chacune a ses avantages/inconvénients (voir plus loin)
 - ▶ Adaptation au cas des nuages de points : calcul de **voisinage**
1. Regroupement (**clustering**) incrémental ou hiérarchique
 - ▶ Les points sont regroupés en **régions (clusters)**
 2. Simplification **itérative**
 3. Simulation de **particules**

- ▶ Approche **bottom-up**, par **croissance de régions**
- ▶ Algorithme :
 1. Initialisation : **graine** choisie aléatoirement parmi les points
 2. Ajout des points les plus proches jusqu'à atteindre une **taille** maximale
 3. Choix d'une nouvelle graine parmi les points restants
- ▶ Taille d'une région liée à la géométrie locale
 - ▶ Exemple : **variation de surface**
- ▶ Seuil sur la taille min pour éviter la création de petites régions, ou post-processing pour les fusionner

- ▶ Approche **top-down**
 - ▶ Les points sont regroupés en **régions (clusters)**
- ▶ Algorithme :
 - ▶ **Diviser** récursivement le nuage de points en régions jusqu'à :
 - ▶ La **taille** de la région devient inférieur à un **seuil**
 - ▶ Ou la **variation de surface** devient inférieure à un seuil

Plan de division défini par :

- ▶ Le **barycentre** du nuage de points
- ▶ L'axe de **plus grande variation**



[Pauly et al. 2002]

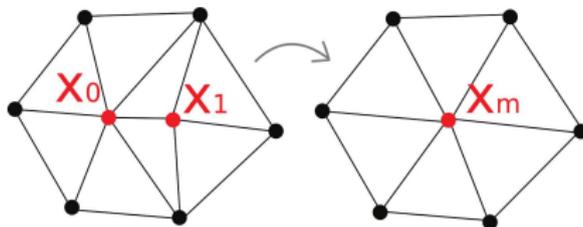


[Pauly et al. 2002]

Incémental

Hierarchique

- ▶ Très populaire pour la simplification de **maillages**
- ▶ Idée : **fusionner itérativement** deux sommets voisins
 - ▶ **File de priorité** sur les arêtes du maillage
 - ▶ **Coût** d'une fusion à définir
 - ▶ **Position** du sommet après fusion à définir



M. Garland et P. Heckbert, "Surface Simplification using Quadric Error Metrics", SIGGRAPH 1997

- ▶ Surface approchée localement en un sommet v par l'**ensemble des plans** portés par les triangles incidents en v
- ▶ **Erreur quadrique** en v = somme des distances au carré de v à ces plans

$$e(v) = \sum_{F \in N(v)} d(v, P(F))^2$$

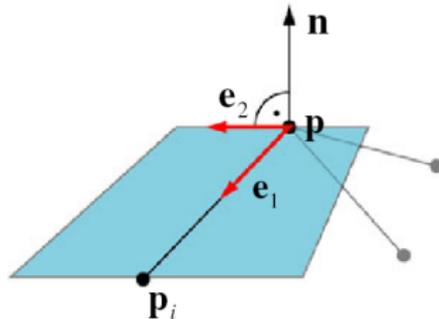
- ▶ Représente la **dévi**ation de v par rapport à la surface
- ▶ Initialement nulle

► **Forme quadratique :**

$$d(v, P(F))^2 = X_v^T Q_F X_v$$

- $X_v = (x_v y_v z_v 1)^T$ (coordonnées homogènes), Q_F matrice symétrique 4×4
- Erreur en v représentée par $Q_v = \sum_{F \in N(v)} Q_F$
- Coût d'une fusion $v_1 v_2$ et position du sommet résultant : $\min(Q_{v_1} + Q_{v_2})$

- ▶ Arêtes virtuelles entre tout point x_i et ses k plus proches voisins x_j
- ▶ Plan tangent en l'**arête** $x_i x_j$: porté par $x_i x_j$ et $x_i x_j \times n_i$
 - ▶ $n_i =$ **normale** à la surface estimée en x_j





original model
(187,664 points)



simplified model
(1,000 points)

[Pauly et al. 2002]

1. Distribution aléatoire de **particules** (= points) sur la surface
 - ▶ Surface MLS
 - ▶ Doit être **uniforme**
2. **Déplacement** des particules selon des **forces de répulsion** inter-particules
3. Fin lorsque l'**équilibre** est atteint

- ▶ Linéaire : $F_j(p_i) = k(r - \|p_i - p_j\|) \cdot (p_i - p_j)$
 - ▶ k = constante de force, r = rayon de répulsion
- ▶ Force totale s'appliquant sur la particule p_i : $F(p_i) = \sum_{p_j \in N(p_i)} F_j(p_i)$
 - ▶ Voisinage = toutes les particules à distance $< r$
- ▶ **Projection** des particules déplacées sur la surface



original model
(75,781 points)



simplified model
(6,000 points)

[Pauly et al. 2002]

	Efficiency	Surface Error	Control	Implementation
Incremental Clustering	+	-	-	+
Hierarchical Clustering	+	-	-	+
Iterative Simplification	-	+	0	0
Particle Simulation	0	+	+	-

[Pauly et al. 2004]



- ▶ Rendu par **surfels**
 - ▶ Normale, rayon
 - ▶ **Splatting**
- ▶ Géométrie locale
 - ▶ **Voisinage** d'un point
 - ▶ Approximation locale de la **surface sous-jacente** : **ACP** et **MLS**
- ▶ Utilisation : **adaptation** de méthodes d'analyse/traitement géométrique de **maillages**
 - ▶ Exemple : simplification

Merci

