Géométrie numérique
M1 ISI - 2017–2018
Travaux Pratiques

TP 2 : Géométrie différentielle discrète

Exercice 1 : Aire associée à un sommet

Reprenez la structure de données *Half-Edge* du TP précédent. Ajoutez à la classe `Vertex` une méthode `barycentricArea()` qui calcule l'aire de la cellule barycentrique associée au sommet considéré (voir Figure 1).

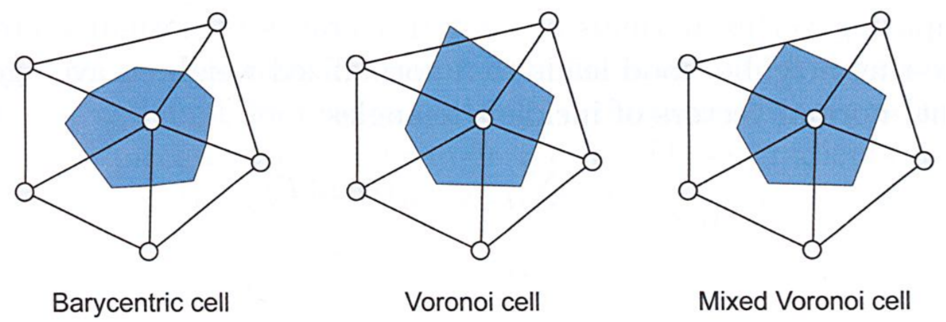

FIGURE 1 – [Botsch et al. 2010]

Ajoutez à la classe `Vertex` une méthode `voronoiArea()` qui calcule l'aire de la cellule de Voronoï associée au sommet considéré (voir Figure 1). On montrera que cette aire est donnée par la formule :

$$A_{voronoi}(x_i) = \frac{1}{8} \sum_{j \in N_1(i)} (cotan\alpha_{ij} + cotan\beta_{ij}) \|x_i - x_j\|^2 \tag{1}$$

(voir Figure 2 (a)).

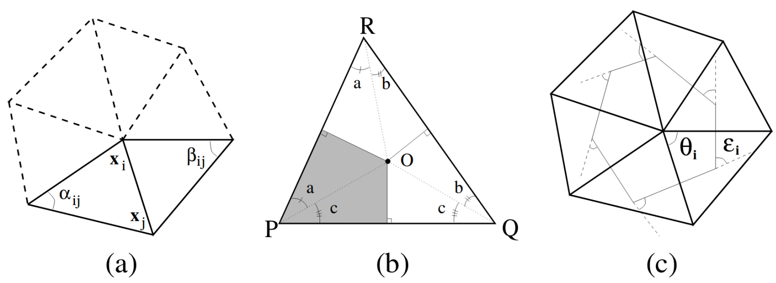

FIGURE 2 – [Meyer et al. 2003]

Ajoutez à la classe `Vertex` une méthode `mixedArea()` qui calcule l'aire de la cellule de Voronoï mixte associée au sommet considéré. Pour cela, on remplacera dans le calcul précédent le centre d'un triangle incident au sommet considéré par le milieu de l'arête opposée, lorsque ce centre est en dehors du triangle (voir Figure 1).

Exercice 2 : Courbures discrètes

Ajoutez à la classe `Mesh` une méthode `exportWithColors()` qui sauvegarde un maillage polygonal dont les sommets ont un attribut de couleur dans un fichier au format `OFF`. Pour cela il suffit de remplacer le mot-clé `OFF` par le mot-clé `COFF` en tête du fichier, puis d'ajouter à chaque ligne indiquant les coordonnées d'un sommet 4 flottants correspondant à la couleur du sommet (niveau de rouge entre 0 et 1, niveau de vert entre 0 et 1, niveau de bleu entre 0 et 1, transparence entre 0 et 1).

Ajoutez à la classe `Vertex` une méthode `gaussianCurvature()` qui calcule la courbure gaussienne discrète au sommet considéré.
Rappel : la courbure gaussienne discrète au sommet x_i est définie comme le défaut d'angle en ce sommet :

$$K(x_i) = \frac{1}{A_i}(2\pi - \sum_j \theta_j) \tag{2}$$

avec A_i l'aire associée au sommet x_i et θ_j l'angle en x_i d'un triangle incident à x_i (voir Figure 2 (c)).

Testez votre méthode `gaussianCurvature()` avec les trois calculs d'aire de l'exercice précédent. Pour cela créez une échelle de couleur (par exemple du bleu au rouge) et associez une couleur à chaque sommet en fonction de sa courbure gaussienne. Vous visualiserez dans un logiciel comme `Meshlab` ou `geomview` les maillages au format `OFF` colorés. Quelle définition d'aire vous semble la plus judicieuse ?

Ajoutez à la classe `Vertex` une méthode `meanCurvature()` qui calcule la courbure moyenne discrète au sommet considéré.
Rappel : la courbure moyenne discrète au sommet x_i est définie comme la moitié de la norme du Laplacien en ce sommet :

$$H(x_i) = \frac{1}{4A_i}\| \sum_{j \in N_1(i)} (cotan\alpha_{ij} + cotan\beta_{ij})(x_i - x_j)\| \tag{3}$$

Testez votre méthode `meanCurvature()` avec les trois calculs d'aire de l'exercice précédent.