

Géométrie numérique

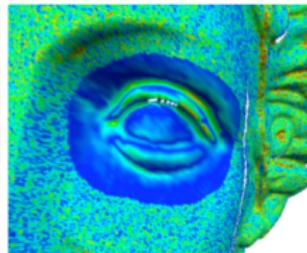
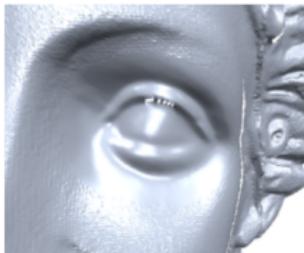
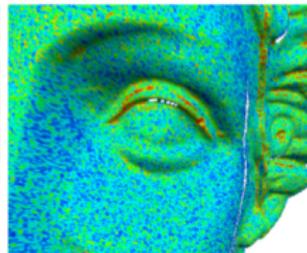
Séance 4 – Lissage et débruitage de maillages

Franck Hétroy-Wheeler

M1 ISI – 2017-2018



- Numérisation d'objet \Rightarrow **bruit** !



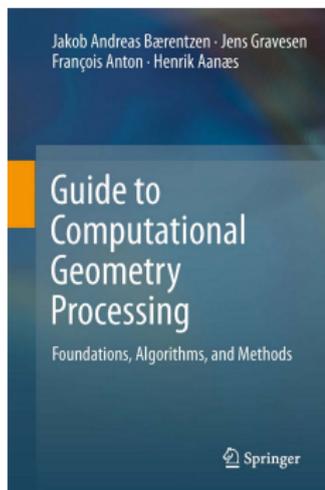
Courbure moyenne
Courtesy M. Botsch et al.

- ▶ Bruit assimilable à **hautes fréquences** géométriques

- ▶ Bruit assimilable à **hautes fréquences** géométriques
- ▶ Débruitage : **filtre** passe-bas

- ▶ Bruit assimilable à **hautes fréquences** géométriques
- ▶ Débruitage : **filtre** passe-bas
- ▶ Nécessité d'une théorie du "traitement du signal géométrique"

- ▶ Chapitre 4 du livre “Polygon Mesh Processing” :
<http://www.pmp-book.org/>
- ▶ Chapitre 9 du livre “Guide to Computational Geometry Processing” :
https://books.google.fr/books?id=01b4_pLIyP8C



Contexte

Traitement du signal

Lissage Laplacien

Lissage spectral

Autres approches

- ▶ Fonction univariée $f : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{C}$
- ▶ **Transformée de Fourier :**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\omega x} dx$$

- ▶ Transformée de Fourier inverse :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{2i\pi\omega x} d\omega$$

- ▶ Fonction univariée $f : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{C}$
- ▶ **Transformée de Fourier :**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\omega x} dx$$

- ▶ Transformée de Fourier inverse :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{2i\pi\omega x} d\omega$$

- ▶ En discret : N échantillons du signal f

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} F(n) e^{2i\pi kn/N}$$

- ▶ **Filtre** = produit de la transformée de Fourier par une autre fonction L :
 - ▶ $F' = FL$

- ▶ **Filtre** = produit de la transformée de Fourier par une autre fonction L :
 - ▶ $F' = FL$
- ▶ Filtre passe-bas naïf : remplacer les hautes fréquences par 0
- ▶ En discret :
 - ▶ $L(n) = 0$ si n au-dessus d'un seuil
 - ▶ $L(n) = 1$ sinon

- ▶ **Filtre** = produit de la transformée de Fourier par une autre fonction L :
 - ▶ $F' = FL$
- ▶ Filtre passe-bas naïf : remplacer les hautes fréquences par 0
- ▶ En discret :
 - ▶ $L(n) = 0$ si n au-dessus d'un seuil
 - ▶ $L(n) = 1$ sinon
- ▶ Dans le domaine spatial : **convolution** $f * l$
 - ▶ $f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)l(t)dt$ dans le cas continu
 - ▶ $f'(k) = f(k) * l(k) = \sum_n f(n)l(k-n)$ en discret

- ▶ Sous l'hypothèse que le filtre l est à support compact et symétrique :

$$f'(k) = \sum_{n=-w}^w f(n)l(k-n)$$

- ▶ Sous l'hypothèse que le filtre l est à support compact et symétrique :

$$f'(k) = \sum_{n=-w}^w f(n)l(k-n)$$

- ▶ **Moyenne pondérée** des valeurs de f au **voisinage** de k
- ▶ Filtre = fonction de pondération

- ▶ Rappel : opérateur de **Laplace-Beltrami** appliqué à la fonction coordonnées pour un sommet x_i

$$L(x_i) = \frac{1}{\|N_1(i)\|} \sum_{j \in N_1(i)} (x_j - x_i)$$

- ▶ Laplacien avec poids uniformes

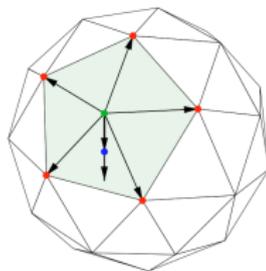
- ▶ Rappel : opérateur de **Laplace-Beltrami** appliqué à la fonction coordonnées pour un sommet x_i

$$L(x_i) = \frac{1}{\|N_1(i)\|} \sum_{j \in N_1(i)} (x_j - x_i)$$

- ▶ Laplacien avec poids uniformes
- ▶ $L(x_i)$ = moyenne des coordonnées des voisins de $x_i - x_i$
- ▶ $L(x_i)$ représente le **vecteur déplacement** du sommet x_i entre le maillage d'origine et le maillage filtré

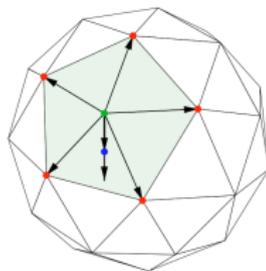
- ▶ Paramètre λ
- ▶ Déplacer chaque sommet x_i dans la **direction du Laplacien** et d'une valeur **proportionnelle à λ** :

$$x_i \leftarrow x_i + \lambda L(x_i)$$



- ▶ Paramètre λ
- ▶ Déplacer chaque sommet x_i dans la **direction du Laplacien** et d'une valeur **proportionnelle à λ** :

$$x_i \leftarrow x_i + \lambda L(x_i)$$



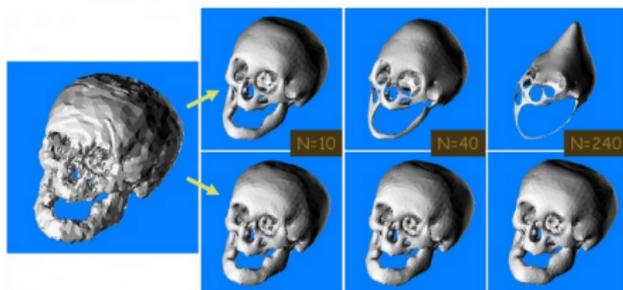
- ▶ λ contrôle le degré de lissage
- ▶ **Itérer** un nombre fixé de fois
- ▶ Voir **T.P.**

- ▶ Inconvénient : **perte de volume**
- ▶ Idée de Taubin (1995) : contre-balancer avec un **déplacement dans la direction opposée**

$$x_i \leftarrow x_i + \lambda L(x_i)$$

$$x_i \leftarrow x_i - \mu L(x_i)$$

- ▶ Attention à bien choisir λ et μ
- ▶ Voir T.P.



Courtesy Douglas Lanman

- ▶ On peut généraliser la formule du Laplacien :

$$L(x_i) = \frac{1}{\sum_{j \in N_1(i)} w_{ij}} \sum_{j \in N_1(i)} w_{ij} (x_j - x_i)$$

- ▶ On peut généraliser la formule du Laplacien :

$$L(x_i) = \frac{1}{\sum_{j \in N_1(i)} w_{ij}} \sum_{j \in N_1(i)} w_{ij} (x_j - x_i)$$

- ▶ Laplacien précédent : **Laplacien à poids uniformes**
 - ▶ $\forall i, \forall j w_{ij} = 1$
 - ▶ Pas de prise en compte de la **géométrie locale**
 - ▶ Problème si triangles de tailles/angles très différents

- ▶ Laplacien dépendant de l'échelle [Fujiwara 1995] :

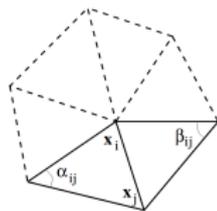
$$L(x_i) = \frac{2}{\sum_{j \in N_1(i)} \|e_{ij}\|} \sum_{j \in N_1(i)} \frac{x_j - x_i}{\|e_{ij}\|}$$

- ▶ Laplacien dépendant de l'échelle [Fujiwara 1995] :

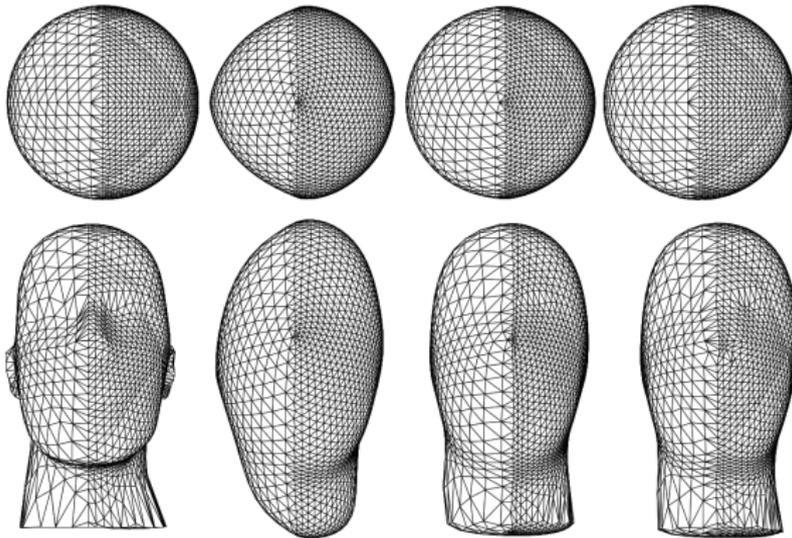
$$L(x_i) = \frac{2}{\sum_{j \in N_1(i)} \|e_{ij}\|} \sum_{j \in N_1(i)} \frac{x_j - x_i}{\|e_{ij}\|}$$

- ▶ Laplacien avec **poids cotangents** [Desbrun et al. 1999] :

$$L(x_i) = \frac{1}{\sum_{j \in N_1(i)} \cotan \alpha_{ij} + \cotan \beta_{ij}} \sum_{j \in N_1(i)} (\cotan \alpha_{ij} + \cotan \beta_{ij})(x_j - x_i)$$



[Meyer et al. 2003]



[Desbrun et al. 1999]

Maillage initial

Poids uniformes

Dépendant de l'échelle

Poids cotangents

- ▶ Discrétisation correcte du Laplacien selon la théorie du **calcul extérieur discret** (sauf poids total)
- ▶ Devenu le **standard**
- ▶ Lien avec la **courbure moyenne**

- ▶ Discrétisation correcte du Laplacien selon la théorie du **calcul extérieur discret** (sauf poids total)
- ▶ Devenu le **standard**
- ▶ Lien avec la **courbure moyenne**

$$\Delta \mathbf{x} = -2H\mathbf{n}$$

- ▶ On parle de **flot de courbure moyenne**

- ▶ Discrétisation correcte du Laplacien selon la théorie du **calcul extérieur discret** (sauf poids total)
- ▶ Devenu le **standard**
- ▶ Lien avec la **courbure moyenne**

$$\Delta \mathbf{x} = -2H\mathbf{n}$$

- ▶ On parle de **flot de courbure moyenne**
- ▶ On parle aussi de **flot de diffusion**
 - ▶ Équation de diffusion (équation de la chaleur) : $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \lambda \Delta f(x,t)$

Contexte

Traitement du signal

Lissage Laplacien

Lissage spectral

Autres approches

- ▶ Problème de l'approche précédente : coupe brutalement les hautes fréquences
 - ▶ Difficile de distinguer les **détails** géométriques du bruit : tout est filtré

- ▶ Problème de l'approche précédente : coupe brutalement les hautes fréquences
 - ▶ Difficile de distinguer les **détails** géométriques du bruit : tout est filtré
- ▶ Observation : les fonctions de base de la **transformée de Fourier** sont des **fonctions propres du Laplacien**

$$1D : \Delta(e^{2i\pi\omega x}) = \frac{d^2}{dx^2} e^{2i\pi\omega x} = -(2\pi\omega)^2 e^{2i\pi\omega x}$$

- ▶ Problème de l'approche précédente : coupe brutalement les hautes fréquences
 - ▶ Difficile de distinguer les **détails** géométriques du bruit : tout est filtré
- ▶ Observation : les fonctions de base de la **transformée de Fourier** sont des **fonctions propres du Laplacien**

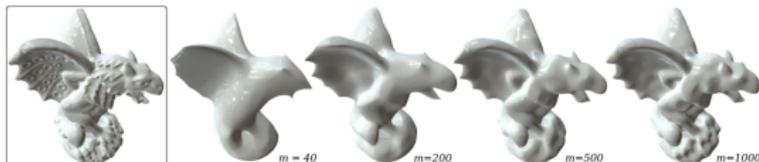
$$1D : \Delta(e^{2i\pi\omega x}) = \frac{d^2}{dx^2} e^{2i\pi\omega x} = -(2\pi\omega)^2 e^{2i\pi\omega x}$$

- ▶ \Rightarrow les vecteurs propres du Laplacien discret correspondent aux **vibrations naturelles** du maillage et ses valeurs propres aux **fréquences naturelles**



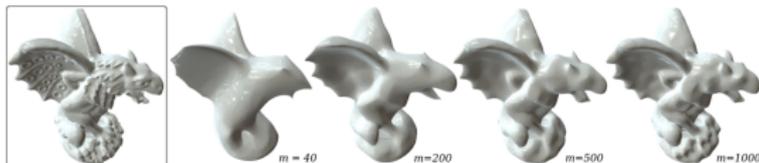
[Vallet et Lévy 2008]

- ▶ Algorithme :
 - ▶ Calculer la **décomposition spectrale** du Laplacien
 - ▶ Ne garder que les vecteurs propres correspondant aux m **plus petites valeurs propres** (basses fréquences)
 - ▶ Revenir à l'espace Euclidien



[Vallet et Lévy 2008]

- ▶ Algorithme :
 - ▶ Calculer la **décomposition spectrale** du Laplacien
 - ▶ Ne garder que les vecteurs propres correspondant aux **m plus petites valeurs propres** (basses fréquences)
 - ▶ Revenir à l'espace Euclidien



[Vallet et Lévy 2008]

- ▶ Remarques :
 - ▶ Simples produits matrice-vecteur
 - ▶ Inconvénient : assez lent
 - ▶ Matrices creuses, utiliser des bibliothèques dédiées

Contexte

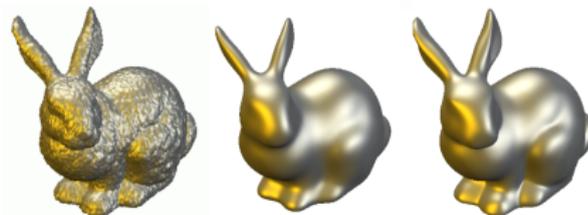
Traitement du signal

Lissage Laplacien

Lissage spectral

Autres approches

- ▶ **Problème** des approches précédentes : lissage **uniforme** dans toutes les directions
- ▶ \Rightarrow les caractéristiques géométriques saillantes (**arêtes vives**) sont arrondies



[Clarenz et al. 2000]

- ▶ **Problème** des approches précédentes : lissage **uniforme** dans toutes les directions
- ▶ \Rightarrow les caractéristiques géométriques saillantes (**arêtes vives**) sont arrondies



[Clarenz et al. 2000]

- ▶ **Solution** : **pénaliser** le lissage au niveau des arêtes vives
 - ▶ Même principe qu'en traitement d'images (arête = changement brusque d'intensité)
 - ▶ Définition arêtes vives : maxima locaux **courbures principales**

Cas des images 2D [Tomasi and Manduchi 1998] :

$$\blacktriangleright I(p_i) \leftarrow \frac{1}{\sum_{j \in N(i)} W_c(\|p_i - p_j\|) W_s(|I(p_i) - I(p_j)|)} \sum_{j \in N(i)} W_c(\|p_i - p_j\|) W_s(|I(p_i) - I(p_j)|) I(p_j)$$

avec $W_c(p) = e^{-p/(2\sigma_c^2)}$ filtre de lissage gaussien et $W_s(I) = e^{-I/(2\sigma_s^2)}$ fonction de similarité en intensité

- ▶ W_s pénalise les grandes variations d'intensité
- ▶ Avantage : **anisotropique**

Extension aux maillages [Fleishman et al. 2003, Jones et al. 2003] :

- ▶ Déplacement dans la direction de la normale n (connue) : $x_i \leftarrow x_i + dn$
- ▶ Approximation locale de la surface lisse en x_i : plan passant par x_i et de normale n

Extension aux maillages [Fleishman et al. 2003, Jones et al. 2003] :

- ▶ Déplacement dans la direction de la normale n (connue) : $x_i \leftarrow x_i + dn$
- ▶ Approximation locale de la surface lisse en x_i : plan passant par x_i et de normale n
- ▶ \Rightarrow Remplacer l'intensité I par le produit scalaire entre n et $x_i - x_j$



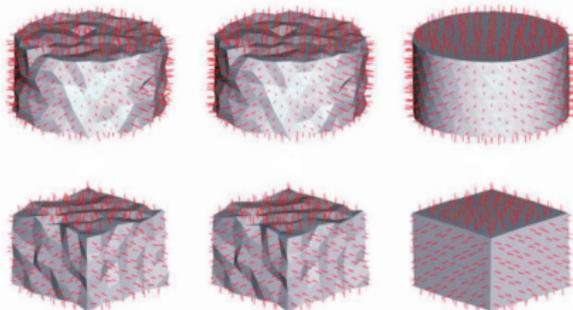
[Fleishman et al. 2003]



Lissage des normales

- ▶ Idée : lisser le **champ de normales** puis en déduire les positions des sommets par approximation

- ▶ Idée : lisser le **champ de normales** puis en déduire les positions des sommets par approximation
- ▶ Exemple : [Shen and Barner 2004]
 - ▶ Itérer k fois $x_i \leftarrow x_i + \lambda \sum_{j \in N_1(i)} \sum_{f \in F_{ij}} n_f(n_f^T(x_i - x_j))$ avec F_{ij} l'ensemble des deux faces incidentes à l'arête $x_i x_j$, n_f la normale lissée à la face f et n_f^T la transposée de n_f .
 - ▶ Voir T.P.



- ▶ Théorie du **traitement du signal géométrique**
- ▶ Bruit = hautes **fréquences** géométriques
- ▶ Filtrage : construction d'un **Laplacien**
- ▶ Extension : préservation des **arêtes vives**

- ▶ [Wei et al. TVCG 2015]
- ▶ [Zhang. et al. TVCG 2015]
- ▶ [Lu et al. TVCG 2016]
- ▶ [Wang et al. SIGGRAPH Asia 2016]
- ▶ [Lu et al. CAGD 2017]
- ▶ [Centin et Signoroni TVCG 2017]
- ▶ ...

Merci

