

Géométrie numérique

Séance 3 – Géométrie différentielle discrète

Franck Hétroy-Wheeler

M1 I3D et IIRVIJ – 2018-2019

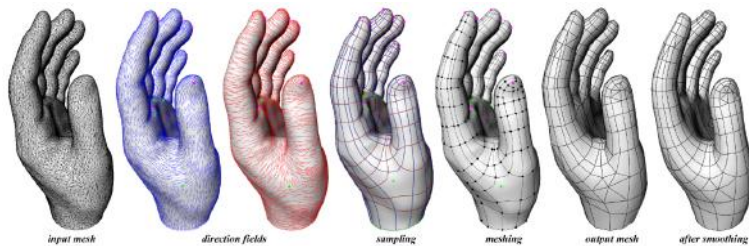


Contexte

- ▶ Maillage = surface **non lisse**
- ▶ **Hypothèse** : approximation linéaire par morceaux d'une surface lisse sous-jacente
- ▶ **Objectif** : trouver des approximations des propriétés différentielles de cette surface sous-jacente
 - ▶ Normale
 - ▶ Gradient
 - ▶ Courbures
 - ▶ ...

Applications

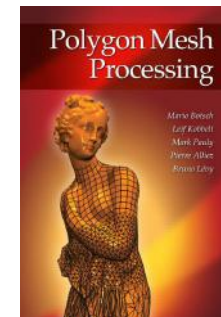
- ▶ Segmentation
- ▶ Remaillage
- ▶ Lissage/débruitage
- ▶ ...



[Alliez et al. 2003]

Références bibliographiques

- ▶ Chapitre 3 du livre "Polygon Mesh Processing" :
<http://www.pmp-book.org/>
- ▶ Discrete Differential Geometry Forum :
<http://ddg.cs.columbia.edu/>



Introduction

Géométrie différentielle

Courbe paramétrique

Surface paramétrique

Géométrie discrète sur les maillages triangulaires

Extensions

Bilan

▶ $\mathbf{x} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^3 (i.e. dérivable 3 fois et de 3ème dérivée continue)

▶ On appelle :

▶ **Vecteur tangent** : $\mathbf{t}(s) = \frac{\mathbf{x}'(s)}{\|\mathbf{x}'(s)\|}$

▶ **Vecteur normal** : $\mathbf{m}(s) = \frac{\mathbf{x}''(s)}{\|\mathbf{x}''(s)\|}$

▶ **Vecteur binormal** : $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{m}(s)$

▶ **Repère de Serret-Frénet** : $(\mathbf{x}(s); \mathbf{t}(s), \mathbf{m}(s), \mathbf{b}(s))$

▶ Vidéo (**t**, **m**, **b**)

▶ **Courbure** : $\kappa(s) = \|\mathbf{x}''(s)\|$

▶ Mesure la déviation par rapport à une droite

▶ **Torsion** : $\tau(s) = \frac{\det[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}'''(s)]}{\kappa^2(s)}$

▶ Mesure le défaut de planarité

▶ Vidéo

▶ $\mathbf{X} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^r paramétrée par (u, v)

▶ Analogues vecteurs tangent/normal/binormal ?

▶ On note $\mathbf{X}_u = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}$ et $\mathbf{X}_v = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}$

▶ **Plan tangent** en p : $T_p \mathbf{X}$ = plan passant par p et engendré par les vecteurs $\mathbf{X}_u(p)$ et $\mathbf{X}_v(p)$

▶ **Vecteur normal** : $\mathbf{n}(p) = \frac{\mathbf{X}_u(p) \times \mathbf{X}_v(p)}{\|\mathbf{X}_u(p) \times \mathbf{X}_v(p)\|}$

▶ $(\mathbf{X}(p); \mathbf{X}_u(p), \mathbf{X}_v(p), \mathbf{n}(p))$ forme aussi un repère local

▶ On note de manière analogue $\mathbf{X}_{uu} = \frac{\partial \mathbf{X}_u}{\partial u} = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u^2}$, etc.

▶ **Première forme fondamentale :**

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v \end{bmatrix}$$

▶ **Seconde forme fondamentale :**

$$\mathbf{II} = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu}^T \mathbf{n} & \mathbf{x}_{uv}^T \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{uv}^T \mathbf{n} & \mathbf{x}_{vv}^T \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

▶ **Opérateur de forme**/Application de Weingarten :

$$\mathbf{W} := \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix}$$

▶ \mathbf{I} = outil géométrique (**tenseur métrique**)

▶ Permet de mesurer aires locales, longueurs de courbes sur la surface, angles, ...

▶ Exemple : anisotropie locale de la surface : décomposition spectrale de \mathbf{I}

▶ Propriétés différentielles ne dépendant que de \mathbf{I} sont dites **intrinsèques**

▶ Ne dépendent que des **distances** entre points sur la surface

▶ Ne dépendent pas de la paramétrisation

▶ Ne dépendent pas de l'espace 3D

▶ \mathbf{II} = propriétés **extrinsèques** de la surface

▶ Dépendent du plongement dans l'espace ambiant \mathbb{R}^3

▶ Exemple : courbure moyenne (voir plus loin) plan vs. cylindre

▶ \mathbf{W} détermine les directions de courbure locale de la surface

▶ Valeurs propres : **courbures principales**

▶ Vecteurs propres : **directions principales de courbure**

▶ M matrice carrée symétrique réelle

▶ M peut se décomposer en $M = Q\Lambda Q^t$

▶ Λ diagonale

▶ $QQ^t = Q^tQ = Id$

▶ Coefficients diagonaux λ_i de Λ = **valeurs propres** de M

▶ Vecteurs colonnes q_i de Q = **vecteurs propres** de M

▶ On a $\forall i, Mq_i = \lambda_i q_i$

- ▶ **Courbures principales et directions principales de courbure :**

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}_1 & \bar{\mathbf{t}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}_1 & \bar{\mathbf{t}}_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

- ▶ **Courbure moyenne :** $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{trace}(\mathbf{W})$
- ▶ **Courbure de Gauss :** $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(\mathbf{W})$

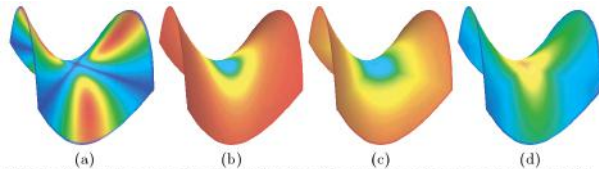


Fig. 5. Curvature plots of a triangulated saddle using pseudo-colors: (a) Mean, (b) Gaussian, (c) Minimum, (d) Maximum.

[Meyer et al. 2003]

<https://geometrycollective.github.io/geometry-processing-js>

- ▶ **Opérateur de Laplace (Laplacien) :**
 - ▶ f fonction différentiable de deux variables dans un espace euclidien
 - ▶ $\Delta f = \text{div}(\text{grad}f) = f_{uu} + f_{vv}$
- ▶ **Opérateur de Laplace-Beltrami :**
 - ▶ f définie sur une surface \mathbf{X} variété lisse
 - ▶ $\Delta_{\mathbf{X}} f = \text{div}_{\mathbf{X}}(\text{grad}_{\mathbf{X}} f)$
 - ▶ Opérateur intrinsèque
 - ▶ Pour \mathbf{u} la fonction qui associe à tout point de \mathbf{X} ses coordonnées :

$$\Delta_{\mathbf{X}} \mathbf{u} = -2H\mathbf{n}$$

Introduction

Géométrie différentielle

Géométrie discrète sur les maillages triangulaires

- Courbures
- Opérateur de Laplace-Beltrami

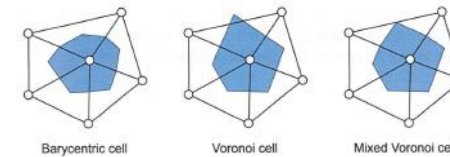
Extensions

Bilan

$$f'(x) \sim \frac{1}{dx}(f(x + dx) - f(x))$$

- ▶ Besoin d'exprimer la valeur d'une quantité géométrique **au voisinage** de tout point x
- ▶ Maillage = approximation linéaire par morceaux d'une surface lisse
⇒ calcul en tout **sommet**

- ▶ Topologique : k -ring
- ▶ Géométrique : prise en compte de l'**aire** des faces
 - ▶ Barycentre
 - ▶ Centre du cercle circonscrit



Courtesy M. Botsch et al.

- ▶ Moyenne **pondérée** des normales aux faces incidentes
- ▶ Poids uniformes : problème pour faces d'aires différentes
- ▶ Autre choix simples : **aire** de la face ou **angle** de la face au sommet
- ▶ Solutions plus élaborées : voir le cours de Keenan Crane
<http://brickisland.net/cs177/?p=217>



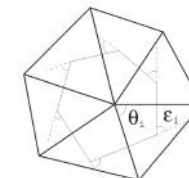
Courtesy M. Botsch et al.

- ▶ **Plan tangent** à un sommet : plan passant par le sommet et orthogonal à sa normale

- ▶ Formule de Gauss-Bonnet pour une surface S à bord régulier par morceaux :

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S) - \sum_i \epsilon_i$$

- ▶ $\chi(S)$ = caractéristique d'Euler, ϵ_i = angles externes de la frontière
- ▶ $\Rightarrow K(v_i) = \frac{1}{A_i}(2\pi - \sum_i \theta_i)$ avec S voisinage de v_i
- ▶ **Défaut d'angle**



[Meyer et al. 2003]

- **Courbure moyenne** définie à partir du Laplacien :

$$\Delta_x \mathbf{u} = -2H\mathbf{n}$$

- On en déduit

$$H(v_i) = \frac{1}{2} \|\Delta \mathbf{u}_i\|$$

avec \mathbf{u}_i fonction qui associe à un sommet ses coordonnées, évaluée en v_i

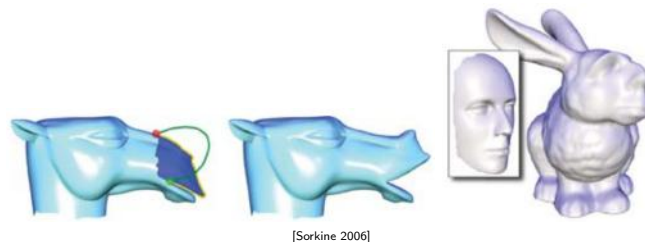
- **Courbures principales** définies à partir des courbures moyenne et gaussienne :

$$\kappa_{1,2}(v_i) = H(v_i) \pm \sqrt{H(v_i)^2 - K(v_i)}$$

Tester les calculs de normale et de courbures de <https://geometrycollective.github.io/geometry-processing-js/projects/discrete-curvatures-and-normals/index.html> avec les modèles fournis ici : <https://seafire.unistra.fr/d/f08bad96e5/>

Intérêts :

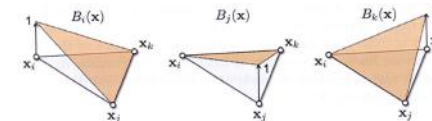
- Calcul courbure moyenne . . .
- Lissage de la surface (cf. prochain cours)
- Modification locale
- Mélange/interpolation de formes



[Sorkine 2006]

- Via ses vecteurs/valeurs propres : compression, décomposition, classification, paramétrisation, . . .

- f donnée en chaque sommet et étendue linéairement par morceaux sur les arêtes et les faces
- S'exprime comme combinaison linéaire de **fonctions de base** :



Courtesy M. Botsch et al.

$$f(x) = f(x_i)B_i(x) + f(x_j)B_j(x) + f(x_k)B_k(x)$$

- On en déduit :

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2A_{ijk}} ((f(x_j) - f(x_i))(x_i - x_k)^\perp + (f(x_k) - f(x_i))(x_j - x_i)^\perp)$$

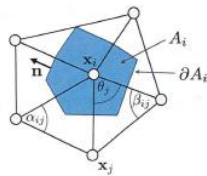
avec \perp rotation 90° dans le plan du triangle

Opérateur de Laplace-Beltrami

- ▶ Divergence du gradient
- ▶ S'exprime généralement sous la forme

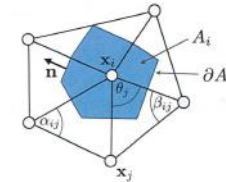
$$\Delta f(v_i) = \frac{1}{W_i} \sum_{v_j \in N(v_i)} w_{ij} (f(v_j) - f(v_i))$$

- ▶ [Taubin 1995] : poids uniformes ($w_{ij} = 1$, $W_i = \#(N(v_i))$)
- ▶ [Pinkall et Polthier 1993, Desbrun et al. 1999] : **poids cotangents** ($w_{ij} = \cotan\alpha_{ij} + \cotan\beta_{ij}$, $W_i = 2A_i$)



Courtesy M. Botsch et al.

Exercice

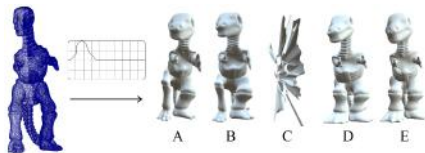


Courtesy M. Botsch et al.

Montrer que $A_i = \frac{1}{8} \sum_{v_j \in N(v_i)} (\cotan\alpha_{ij} + \cotan\beta_{ij}) \|v_j - v_i\|^2$

Opérateur de Laplace-Beltrami

- ▶ **Symétrisation** [Vallet et Lévy 2008] : $\sqrt{A_i A_j}$ au lieu de A_i



[Vallet et Lévy 2008]

- ▶ **No free lunch** [Wardetzky et al. 2007] : quelque soit la définition du Laplacien, il existe toujours un maillage où il ne vérifie pas une propriété intéressante (parmi 4)
- ▶ Définitions alternatives **convergeant** vers l'opérateur lisse [Wang et al. 2013], [Xu et al. 2013]

Introduction

Géométrie différentielle

Géométrie discrète sur les maillages triangulaires

Extensions

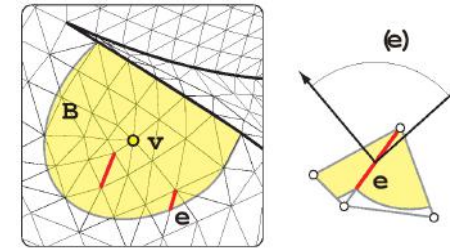
Bilan

- ▶ Problème des définitions précédentes : pas **intrinsèques**
 - ▶ Deux maillages approchant la même surface \Rightarrow courbures différentes
- ▶ [Cohen-Steiner et Morvan 2003] : **tenseur de courbure** $\tau(v)$ en un sommet v
- ▶ Vecteurs propres de $\tau(v)$ = normale en v + directions principales de courbure (cf. W)
- ▶ **Converge** vers les valeurs dans le cas lisse

- ▶ Formule :

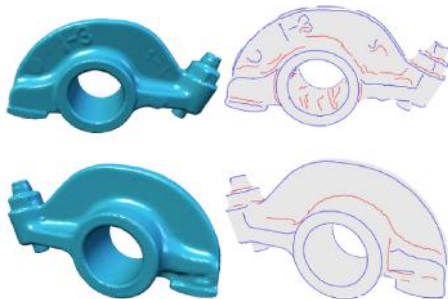
$$\mathcal{T}(v) = \frac{1}{|B|} \sum_{\text{edges } e} \beta(e) |e \cap B| \bar{e} \bar{e}^t$$

avec $\bar{e} = e/\|e\|$



[Alliez et al. 2003]

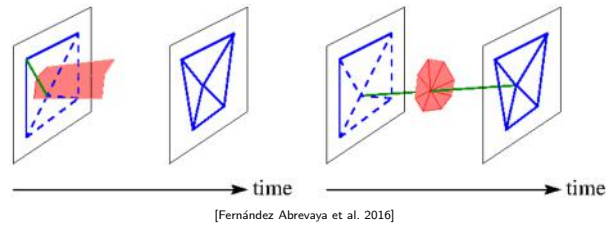
- ▶ Définition : **extrema des courbures principales** le long de la direction de courbure correspondante



[Yoshizawa et al. 2005]

- ▶ Calcul difficile car **quantités différentielles du second ordre**
- ▶ Méthodes existantes nécessitent presque toutes un **post-filtrage**
- ▶ Voir notamment les travaux d'Alexander Belyaev

- ▶ **Surfaces simpliciales** (non variétés) : [Bobenko et Springborn 2007]
- ▶ **Maillages polygonaux** : [Alexa et Wardetzky 2011]
- ▶ **Nuages de points** : [Belkin et al. 2009], [Liu et al. 2012], [Petronetto et al. 2013]
- ▶ **Séquences de maillages** : [Fernández Abrevaya et al. 2016] (vidéo)



Introduction

Géométrie différentielle

Géométrie discrète sur les maillages triangulaires

Extensions

Bilan

- ▶ Géométrie différentielle des surfaces : **normale**, **courbures**, opérateur de **Laplace**
- ▶ Maillage = approximation **linéaire par morceaux** d'une surface lisse
- ▶ Quantités différentielles : besoin d'une notion de **voisinage**
- ▶ Problème de la **convergence**

Merci

